







COURS

MÉCANIQUE DES FLUIDES 2

1ère Année - ME

Fethi ALOUI

Professeur à l'ENSIAME
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Laboratoire TEMPO - EA 4542 - (DF2T)
Le Mont Houy - 59313 Valenciennes Cedex 09 - France

E-mail : Fethi.Aloui@univ-valenciennes.fr

SOMMAIRE

Chapitre 0

Rappels sur la Cinématique
et la
Dynamique des Fluides Incompresibles

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

1. Équation de continuité (conservation de la masse)

L'équation de continuité doit traduire le principe de conservation de la masse *m* : ***la variation de masse pendant un temps dt d'un élément de volume fluide doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle de fluide sortant.***

Bilan de masse sur $dv = dx_1dx_2dx_3$ pendant l'unité de temps dt :

x_3
$u_3(x_3+dx_3)$
x_3+dx_3
$u_2(x_2)$
$u_1(x_1)$
$u_2(x_2+dx_2)$
x_2
x_2+dx_2
$u_3(x_3)$
x_1+dx_1
$u_1(x_1+dx_1)$
x_1

$$\begin{cases} \left([\rho u_1 dx_2 dx_3 dt]_{x_1} - [\rho u_1 dx_2 dx_3 dt]_{x_1+dx_1}\right) = \left([\rho u_1]_{x_1} - [\rho u_1]_{x_1+dx_1}\right) dx_2 dx_3 dt \\ \left([\rho u_2 dx_1 dx_3 dt]_{x_2} - [\rho u_2 dx_1 dx_3 dt]_{x_2+dx_2}\right) = \left([\rho u_2]_{x_2} - [\rho u_2]_{x_2+dx_2}\right) dx_1 dx_3 dt \\ \left([\rho u_3 dx_1 dx_2 dt]_{x_3} - [\rho u_3 dx_1 dx_2 dt]_{x_3+dx_3}\right) = \left([\rho u_3]_{x_3} - [\rho u_3]_{x_3+dx_3}\right) dx_1 dx_2 dt \end{cases}$$

Développement en série de Taylor à l'ordre 1 de $[\rho u_i]_{x_i+dx_i}$, puis calcul de la différence:

$$[\rho u_i]_{x_i+dx_i} = [\rho u_i]_{x_i} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} dx_i \Longrightarrow \left([\rho u_i]_{x_i} - [\rho u_i]_{x_i+dx_i}\right) dx_2 dx_3 dt = -\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Au total, le bilan à travers les 6 faces donne :

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left(-\frac{\partial(\rho\, u_i)}{\partial x_i}\right)dx_1dx_2dx_3dt=-\left(\frac{\partial(\rho\, u_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\rho\, u_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\rho\, u_3)}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3dt$$

Or la masse élémentaire ***dm*** *est donnée par :*

$$dm=\frac{\partial\rho}{\partial t}\underbrace{dx_1dx_2dx_3}_{dv}dt=-\underbrace{\left(\frac{\partial(\rho\, u_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\rho\, u_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\rho\, u_3)}{\partial x_3}\right)}_{\vec{\nabla}(\rho\vec{V})}\underbrace{dx_1dx_2dx_3}_{dv}dt$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho\vec{V})=0}\quad \text{ou bien}\quad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{V})=0}$$

ou encore

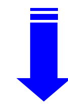
$$\boxed{\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+div(\rho\vec{V})=\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+\rho.div(\vec{V})+\vec{V}.\overrightarrow{grad}(\rho)=\frac{d\rho}{dt}+\rho.div(\vec{V})=0}$$

C'est l'***équation de la continuité***, qui traduit la ***conservation de la masse***.

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Écoulement permanent (stationnaire)

Toute dérivée par rapport au temps est nulle: $\frac{\partial ...}{\partial t} = 0$



$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + div(\rho\vec{V}) = div(\rho\vec{V}) = \rho.div(\vec{V}) + \vec{V}.\overrightarrow{grad}(\rho) = 0$$

Écoulement isovolume (écoulement incompressible)

$$\rho = cste \Rightarrow \overrightarrow{grad}(\rho) = \vec{0} \Rightarrow div(\vec{V}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

2. Accélération de l'écoulement

Selon la définition de la **dérivée particulaire** pour un vecteur, au sens cinématique, le vecteur ***accélération*** d'une particule fluide dans l'écoulement s'écrit :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial t}}_{=u_1} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_2} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial t}}_{=u_2} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_3} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_3}{\partial t}}_{=u_3}$$

où : $\vec{V} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_3} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \begin{pmatrix} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & + & u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & + & u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & + & u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & + & u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & + & u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & + & u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Ou encore :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)(u_i) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (u_{j,i})(u_i)$$

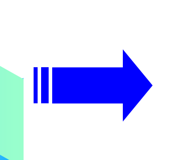
Le tenseur gradient est donné par :

$$\overset{\Rightarrow}{grad}\left(\vec{V}\right) = \overset{\Rightarrow}{\nabla}\left(\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \left(u_{j,i} \right)$$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Donc :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^t (u_i) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (u_{i,j})^t (u_i)$$



$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{V})\right)^t . \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\overset{\Rightarrow}{\nabla}(\vec{V})\right)^t . \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^t (u_i) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (u_{i,j})^t (u_i)$$

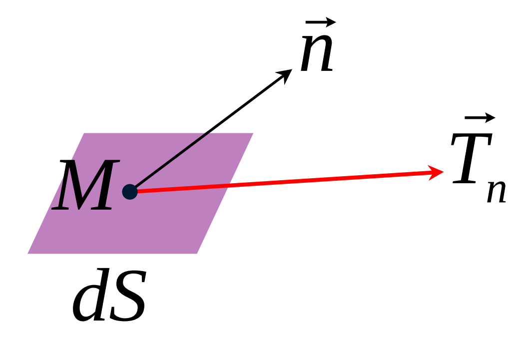
RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

3. Forces surfaciques - Tenseur des contraintes

Pour un fluide réel (visqueux) en mouvement, les forces de surface ne sont plus seulement normales à la surface : il existe également des contraintes tangentielles qui sont dues à la viscosité du fluide (frottements).

En un point M d'une surface élémentaire *dS*, la force de surface est donnée par :

$$d\vec{F} = \vec{T}_n \, dS$$

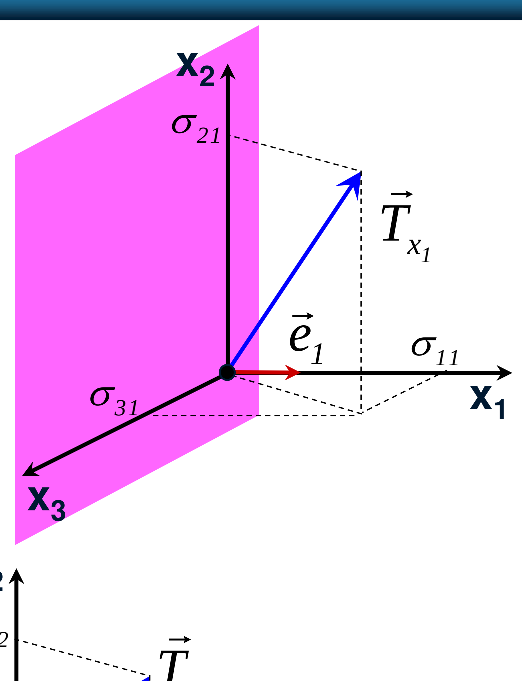


avec $\vec{T}_n$ est la contrainte s'exerçant sur la surface élémentaire de normale $\vec{n}$.

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Considérons une surface $\perp$ à l'axe x_1. La normale à cette surface est : $\vec{n} = \vec{e}_{x_1}$

La contrainte exercée sur cette surface, notée $\vec{T}_{x_1}$, peut être décomposé ainsi :



$$\vec{T}_{x_1} = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3$$

Les composantes σ_{21} et σ_{31} sont des composantes tangentielles : on les notera par τ_{21} et τ_{31} pour les distinguer de la composante normale σ_{11}.

Considérons la sur face $\perp$ à l'axe x_2. La contrainte s'écrit :

$$\vec{T}_{x_2} = \tau_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \tau_{32}\vec{e}_3$$

Pour la sur face $\perp$ à l'axe x_3. La contrainte s'exprime :

$$\vec{T}_{x_3} = \tau_{13}\vec{e}_1 + \tau_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Pour une surface d'orientation quelconque, la normale peut se décomposer dans le repère cartésien ainsi :

$$\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$$

La contrainte s'exerçant sur cette surface s'écrit :

$$\vec{T}_n = n_1\vec{T}_{x_1} + n_2\vec{T}_{x_2} + n_3\vec{T}_{x_3}$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{T}_n &= n_1\left(\sigma_{11}\vec{e}_1 + \tau_{21}\vec{e}_2 + \tau_{31}\vec{e}_3\right) + n_2\left(\tau_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \tau_{32}\vec{e}_3\right) + n_3\left(\tau_{13}\vec{e}_1 + \tau_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3\right)\\ &= \left(n_1\sigma_{11} + n_2\tau_{12} + n_3\tau_{13}\right)\vec{e}_1 + \left(n_1\tau_{21} + n_2\sigma_{22} + n_3\tau_{23}\right)\vec{e}_2 + \left(n_1\tau_{31} + n_2\tau_{32} + n_3\sigma_{33}\right)\vec{e}_3\end{aligned}$$

En écriture matricielle, cela revient à :

$$\vec{T}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{T}_n = \overline{\overline{T}}\,\vec{n}$$

Tenseur des contraintes

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Le tenseur $\overline{\overline{T}}$ peut être décomposé en deux parties :

- Un tenseur ***sphérique*** $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \, \overline{\overline{I}}$

- Un tenseur de ***trace nulle*** $\Rightarrow$ $\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma'_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma'_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Tenseur des contraintes de viscosité}} = \overline{\overline{T'}}$

$$\overline{\overline{T}} = \alpha \, \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{T'}}$$

où : $\begin{cases} \sigma_{11} = \alpha + \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} = \alpha + \sigma'_{22} \\ \sigma_{33} = \alpha + \sigma'_{33} \end{cases}$ et $\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = 0 = -3\alpha + \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

$$\alpha = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} Tr\left(\overline{\overline{T}}\right)$$

or : $\vec{T}_n = \overline{\overline{T}} \, \vec{n} = \alpha \, \overline{\overline{I}}.\vec{n} + \overline{\overline{T'}}.\vec{n} = \alpha \, \vec{n} + \overline{\overline{T'}}.\vec{n}$

et : $d\vec{F} = \vec{T}_n \, dS = \underbrace{\alpha \, \vec{n} \, dS}_{\text{force normale à la surface}} + \overline{\overline{T'}}.\vec{n} \, dS$ $\Rightarrow$ $d\vec{F} = -p \, \vec{n} \, dS + \overline{\overline{T'}}.\vec{n} \, dS$

Force de pression hydrostatique : ***α = -p***

avec : $\begin{cases} p = -\frac{1}{3} Tr\left(\overline{\overline{T}}\right) \\ Tr\left(\overline{\overline{T'}}\right) = 0 \end{cases}$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

4. Principe Fondamental de la Dynamique

Nous allons établir l'équation fondamentale de la dynamique en appliquant le ***principe fondamental de la dynamique*** à un élément de volume fluide en mouvement. Nous ferons par la suite un ***bilan des forces*** s'exerçant en surface et en volume.

$$d\vec{F} = d\vec{F}_S + d\vec{F}_\vee = \rho d\vee \frac{d\vec{V}}{dt}$$

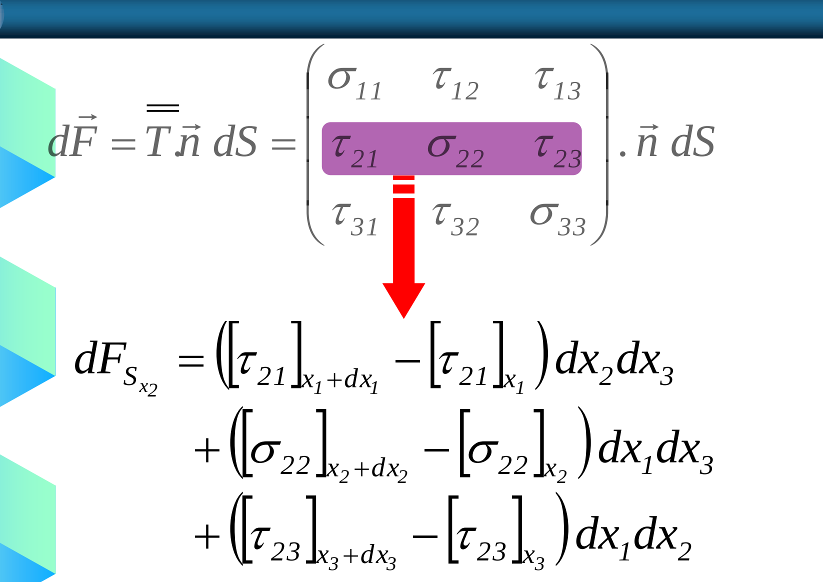
Forces de surface

Forces de volume → poids : $\rho\, \vec{g}\, d\vee$

$$dF_{S_{x1}}\, \vec{e}_1 + dF_{S_{x2}}\, \vec{e}_2 + dF_{S_{x3}}\, \vec{e}_3$$

Prenons par exemple cette composante suivant l'axe x_2.

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES



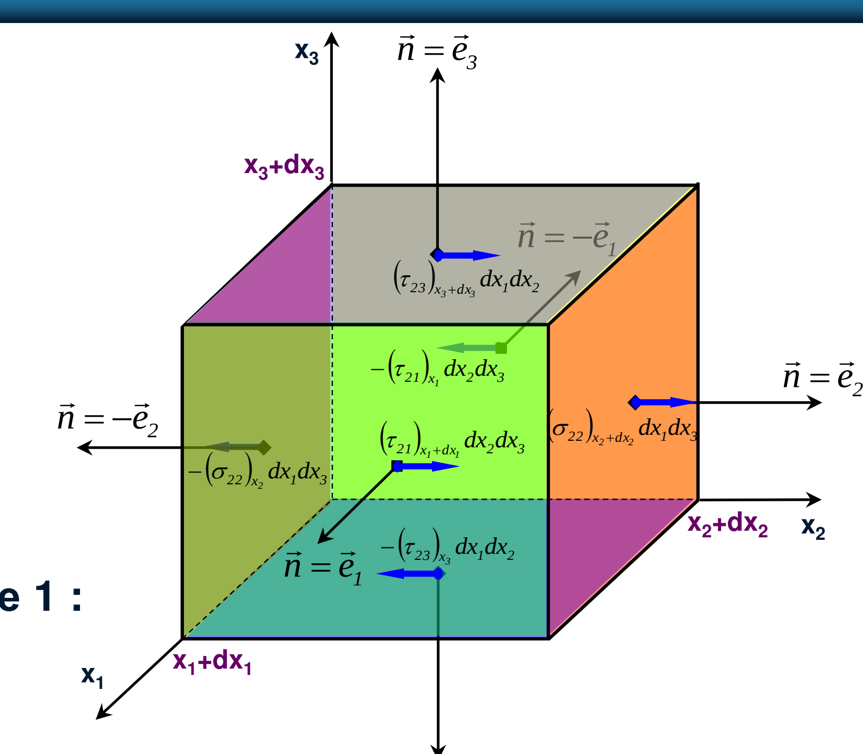
$$d\vec{F} = \overline{\overline{T}}\,\vec{n}\,dS = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} . \vec{n}\,dS$$

$$dF_{S_{x_2}} = \left([\tau_{21}]_{x_1+dx_1} - [\tau_{21}]_{x_1}\right) dx_2 dx_3 + \left([\sigma_{22}]_{x_2+dx_2} - [\sigma_{22}]_{x_2}\right) dx_1 dx_3 + \left([\tau_{23}]_{x_3+dx_3} - [\tau_{23}]_{x_3}\right) dx_1 dx_2$$



Développement en série de Taylor à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} [\tau_{21}]_{x_1+dx_1} = [\tau_{21}]_{x_1} + \dfrac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} dx_1 \\ [\sigma_{22}]_{x_2+dx_2} = [\sigma_{22}]_{x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 \\ [\tau_{23}]_{x_3+dx_3} = [\tau_{23}]_{x_3} + \dfrac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} dx_3 \end{cases}$$



$$dF_{S_{x_2}} = \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} dx_3 x_1 dx_2$$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Finalement, on obtient sur l'***axe x_2*** :

$$dF_{S_{x_2}} = \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1}\underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{d\vee} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}\underbrace{dx_2 dx_1 dx_3}_{d\vee} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3}\underbrace{dx_3 x_1 dx_2}_{d\vee} = \left(\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3}\right) d\vee$$

De la même façon, on obtient sur les autres axes x_1 et x_3 :

$$\begin{cases} dF_{S_{x1}} = \left(\dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}\right) d\vee \\ dF_{S_{x3}} = \left(\dfrac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\right) d\vee \end{cases}$$

→ ***axes x_1***

→ ***axes x_3***

D'où l'expression générale :

$$d\vec{F}_S = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} d\vee = \vec{\nabla}\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} d\vee = \vec{\nabla}\overline{\overline{T}}\, d\vee$$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Or, l'effort élémentaire total ***dF*** est la somme globale des efforts dus aux contraintes surfaciques ***dF*** dF_S et des efforts dus aux contraintes volumiques dF_V :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_S + d\vec{F}_\vee = \rho\, d\vee \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{\nabla}\overline{\overline{T}}\, d\vee + \rho\, \vec{g}\, d\vee = \rho\, d\vee \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{\nabla}\overline{\overline{T}} + \rho\, \vec{g} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Dans le tenseur des contraintes, en faisant apparaître les deux parties symétrique et antisymétrique, on obtient :

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{T'}} \Rightarrow \vec{\nabla}\overline{\overline{T}} = -\vec{\nabla}\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \vec{\nabla}\overline{\overline{T'}} = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\overline{\overline{T'}}$$

Finalement :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\overline{\overline{T'}} + \rho\, \vec{g}$$

C'est l'équation fondamentale de la dynamique, écrite sous une forme locale

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien

Fluides newtoniens → les *composantes du tenseur des contraintes visqueuses* $\overline{\overline{T'}}$ **dépendent linéairement** des *composantes du tenseur des taux de déformation pure* $\overline{\overline{\varepsilon}}$.

Normalement, une rotation pure n'engendre aucune déformation → pas de contrainte: c'est-à-dire $\overline{\overline{T'}}$ et $\overline{\overline{\omega}}$ ne sont pas liés.

Les éléments du tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ sont : $\overline{\overline{\varepsilon}} = \left[\varepsilon_{ij}\right] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \Rightarrow \text{Tenseur symétrique}$

Pour un fluide isotrope, les éléments de $\overline{\overline{T'}}$ et $\overline{\overline{\varepsilon}}$ sont liée par l'expression :

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \mu'\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)\delta_{ij}$$

avec : $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} u_{i,i} = div\left(\vec{V}\right) = \vec{\nabla}.\vec{V}$ et $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$

Fluide incompressible → $div\left(\vec{V}\right) = \vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ → $\sigma'_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij}$ **et** $\overline{\overline{T'}} = 2\mu\,\overline{\overline{\varepsilon}}$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Pour un fluide incompressible newtonien, l'*équation fondamentale de la dynamique* devient :

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\overline{\overline{T'}} + \rho\,\vec{g} = -\vec{\nabla}p + 2\mu\,\vec{\nabla}\overline{\overline{\varepsilon}} + \rho\,\vec{g}$$

où le terme $\vec{\nabla}\overline{\overline{\varepsilon}}$ s'écrit : $\vec{\nabla}\overline{\overline{\varepsilon}} = \sum_i\left(\sum_j \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_j}\right)\vec{e}_i$ avec : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Ce qui donne :

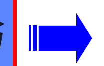
$$\vec{\nabla}\overline{\overline{\varepsilon}} = \sum_i\left(\sum_j \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\right)\right)\vec{e}_i = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i\underbrace{\left(\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)}_{\Delta u_i}\vec{e}_i}_{\Delta\vec{V}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\left(\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)}_{\vec{\nabla}.\vec{V}}\vec{e}_i}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V})} = \frac{1}{2}\Delta\vec{V} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{V}\right)$$

car le fluide est incompressible

$$\vec{\nabla}\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\Delta\vec{V}$$

D'où l'équation fondamentale de la dynamique pour un fluide newtonien incompressible :

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}p + 2\mu\,\vec{\nabla}\overline{\overline{\varepsilon}} + \rho\,\vec{g} = -\vec{\nabla}p + \mu\,\Delta\vec{V} + \rho\,\vec{g}$$



C'est l'équation de Navier-Stokes (équation locale)

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Dérivée particulaire de la vitesse $\vec{V}$:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\vec{V}\right).\vec{V} \quad \Rightarrow \quad \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\,\vec{\nabla}\right).\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}p + \mu\,\Delta\vec{V} + \rho\,\vec{g}$$

Dérivée temporelle — Dérivée convective

En posant $\vec{g} = -g\,\vec{e}_3$, l'*équation de Navier-Stokes* projetée sur les 3 axes du repère cartésien, *(o,x_1,x_2,x_3)*, s'écrit alors :

$$\begin{cases}
\rho\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) \\
\rho\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_2} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right) \\
\rho\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial t} + u_1\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_3} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right) - \rho g
\end{cases}$$

Ces équations déduites du principe fondamental de la dynamique pour un fluide newtonien incompressible, traduisent la conservation de la quantité de mouvement.

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Cas d'un fluide parfait incompressible

Un ***fluide parfait*** est un fluide au sein duquel on peut négliger les effet visqueux, c'est-à-dire les *contraintes liées à la viscosité*. Ainsi, pour un **écoulement incompressible** les ***équations de Navier stokes*** deviennent :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\,\vec{g}$$

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ \rho\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_2} \\ \rho\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial t} + u_1\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_3} - \rho g \end{cases}$$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

L'équation de Bernoulli traduit la **conservation de l'énergie de fluide en écoulement sur une ligne de courant**, dans un **écoulement permanent de fluide parfait** même en **présence de tourbillons**. Ainsi, la **somme** des **énergies cinétique, potentielle** et **celle communiquée par les forces de pression se conserve**.

C'est-à-dire, entre deux sections droites de l'écoulement monodimensionnel, notées par exemple 1 et 2, on obtient :

$$\left(p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho\, g\, z_2\right) - \left(p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho\, g\, z_1\right) = 0$$

Il va de soi que si, entre les deux sections 1 et 2, l'écoulement reçoit ou perd une énergie **W** par unité de masse, on aura alors :

$$\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g\, z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g\, z_1\right) = \overline{W}$$

Cette équation s'appelle ***équation de Bernoulli généralisée***

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Cette équation de mouvement pour un fluide parfait incompressible, s'écrit également :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\,\vec{g} = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right) = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right)\wedge\vec{V}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right)\wedge\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\left(p\right) + \vec{g}$$

Pour un écoulement permanent de fluide parfait soumis uniquement à la *seule force à distance qui celle de la pesanteur*, les équations d'Euler se réduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{g} = \overrightarrow{grad}\left(-g\ x_3\right), \\ \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right)\wedge\vec{V} = -\dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\left(p\right) + \vec{g} = -\dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\left(p\right) + \overrightarrow{grad}\left(-g\ x_3\right) \end{cases}$$

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Pour un écoulement **monodimensionnel, rotationnel ou irrotationel**, les **équations d'Euler** le long d'une **ligne de courant**, après projection sur $d\vec{\ell}$ se réduisent à :

$$\begin{cases} \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right).d\vec{\ell} = -\frac{1}{\rho}\left(\overrightarrow{grad}(p)\right).d\vec{\ell} - \left(\overrightarrow{grad}(g\ x_3)\right).d\vec{\ell} \\ car \\ \overrightarrow{rot}(\vec{V})\wedge\vec{V}\ est\ perpendiculaire\ à\ \vec{V}, et\ \vec{V}\ est\ colinéaire\ à\ d\vec{\ell} \end{cases}$$

Puisqu'il n'y a qu'une coordonnée de l'espace, l'équation précédente devient si on pose $x_3 = z$:

$$\frac{d}{d\ell}\left(\frac{V^2}{2}\right).d\ell + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\ell}d\ell + g\frac{d(z)}{d\ell}d\ell = d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}dp + gdz = 0$$

Après intégration de cette équation différentielle du 1er ordre à variables séparables, on obtient :

$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = Cste$ ou encore : $p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho\, g\, z = Cste$ ***formule de Bernoulli (1738)***

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

5. Théorème d'Euler ou théorème des quantités de mouvement

Le théorème de Bernoulli est d'une utilisation trop limitée. En effet, *il ne permet pas d'exprimer les actions mécaniques pouvant apparaître entre des fluides et des solides par exemple*. D'où la nécessité d'introduire un deuxième théorème: c'est le *théorème d'Euler*.

Ce théorème est établi à partir de la relation fondamentale de la dynamique pour un fluide parfait (incompressible, non visqueux) et un écoulement stationnaire :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right) = \frac{d}{dt}\iiint_{\vee} \rho\vec{V} d\vee = \rho\frac{d}{dt}\iiint_{\vee} \vec{V} d\vee$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\vee} \rho\vec{V} d\vee = \underbrace{\iiint_{\vee}\left(\frac{\partial\left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}\left(\rho\vec{V}\right).\vec{V}\right)}_{\text{dérivée particulaire}} d\vee = \iiint_{\vee} \frac{\partial\left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t} d\vee + \underbrace{\iiint_{\vee} \overline{\overline{grad}}\left(\rho\vec{V}\right).\vec{V}\, d\vee}_{\substack{Ostrogradski \\ \Downarrow \\ \iint_{\Sigma}\left(\rho\vec{V}\right).\vec{V}.\vec{n}\, dS}}$$

(le terme $\frac{\partial\left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t}$ est barré)

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\vee}\left(\rho\vec{V}\right) d\vee = \sum \vec{F}_{ext} = \iint_{\Sigma}\left(\rho\vec{V}\right)\vec{V}.\vec{n}\, dS = \vec{R} + \vec{P}$$

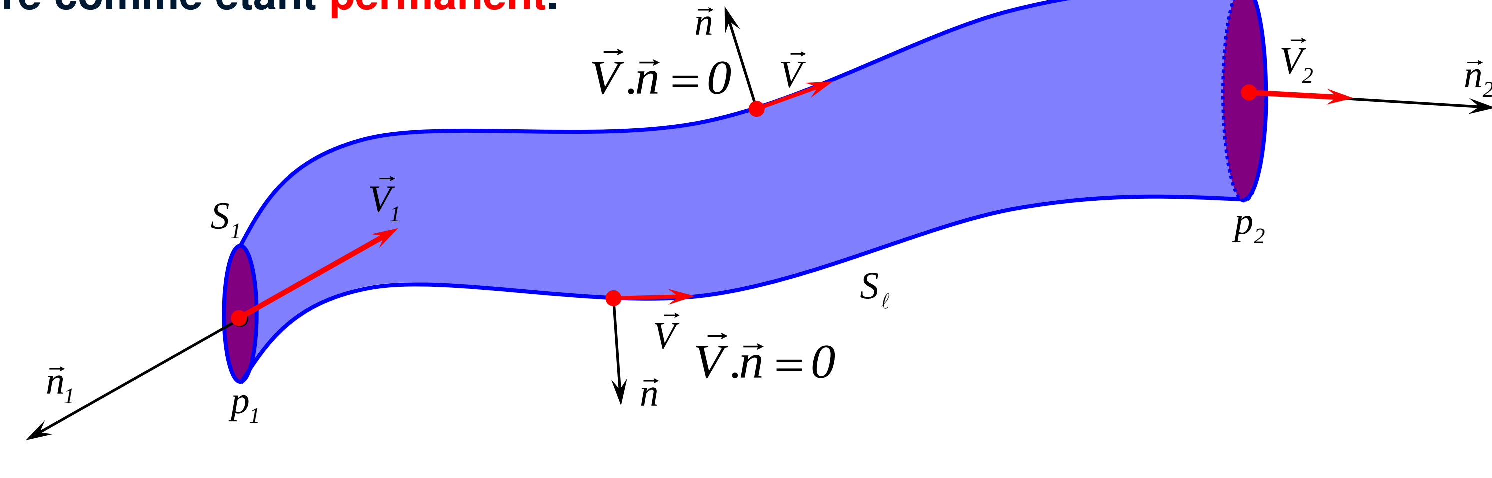
$\vec{R}$: forces de pression

$\vec{P}$: forces volumiques (poids)

RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DES FLUIDES ET LA DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Application à un tube de courant :

Appliquons le cas précédent à un tube de courant dans lequel la vitesse dans une section droite est uniforme. L'écoulement d'un fluide parfait incompressible, est considéré comme étant permanent.



$$\underbrace{\vec R}_{\substack{\Downarrow \\ (p_2S_2-p_1S_1)\vec n_2}} + \underbrace{\vec P}_{\substack{\Downarrow \\ \text{forces volumiques}}} = \iint_{\Sigma=S_1+S_2+S_\ell} (\rho\vec V)\vec V.\vec n\, dS = \underbrace{\iint_{S_1} (\rho\vec V)\vec V.\vec n\, dS}_{\substack{\Downarrow \\ -\rho V_1\vec V_1 S_1 \;\; car \;\; V=Cste \;\; sur \;\; S_1}} + \underbrace{\iint_{S_2} (\rho\vec V)\vec V.\vec n\, dS}_{\substack{\Downarrow \\ \rho V_2\vec V_2 S_2 \;\; car \;\; V=Cste \;\; sur \;\; S_2}} + \underbrace{\iint_{S_\ell} (\rho\vec V)\vec V.\vec n\, dS}_{\substack{\Downarrow \\ =0 \;\; car \;\; \vec V \perp \vec n}}$$

Chapitre 1

Ecoulements compressibles d’un gaz parfait et idéal

Chapitre 3 :

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

1. Introduction

L'hypothèse de *fluide incompressible* est évidemment parfaitement justifiée pour les liquides. *Dans le cas des gaz, elle est encore valable tant que les variations de pression mises en jeu restent modérées mais toujours petites par rapport à la pression absolue du fluide* : les calculs s'effectuent alors en supposant le *milieu isotherme* (c'est ce que nous avons fait jusqu'à présent).

Mais d'importantes variations de pression entraînent des variations notables de la masse volumique ρ, et on ne peut plus considérer dans les calculs ρ comme une constante.

De telles variations importantes de pression interviennent notamment dans le cas des *grandes vitesses* (*approchant la vitesse du son*) d'écoulement d'un gaz (tuyère) ou dans celui des déplacements rapides d'un corps solide dans un milieu gazeux (avion, lancement d'un projectile, turbine à vapeur).

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

2. Relation de Saint-Venant

Pour établir la relation de Saint-venant, nous allons considéré les hypothèses suivantes pour le gaz :

- *Écoulement permanent*
- *Écoulement irrotationnel*
- *Écoulement monodimentionnel selon une abscisse curviligne l*
- *Écoulement soumis à la seule force à distance qui est celle de la pesanteur*
- *Fluide supposé parfait lors de l'écoulement (sans viscosité, ou sans frottement ou sans énergie dissipative)*
- *Écoulement adiabatique*

Ces hypothèses conduisent à l'établissement de la relation de *Saint-Venant*, qui est *bien vérifiée expérimentalement* pour l'air en écoulement *transsonique* ou *supersonique*.

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Compte tenu de ces hypothèses, l'équation de ***Navier - Stokes*** se réduit à l'équation d'***Euler*** :

x_3, x_2, x_1

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right) = \rho\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{V} = \rho\left(\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(V^2\right) - \vec{V}\wedge\left(\vec{V}\wedge\vec{\nabla}\right)\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\,\vec{g}$$

ou bien :

$$\rho\left(\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\wedge\left(\vec{V}\wedge\vec{\nabla}\right)\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\,\vec{g} = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}\left(\rho\, g\, x_3\right)$$

ou bien :

$$\vec{\nabla}\left(p + \rho\, g\, x_3 + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \rho\vec{V}\wedge\left(\vec{V}\wedge\vec{\nabla}\right)$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Pour un écoulement monodimensionnel, rotationnel ou irrotationel, les équations d'Euler le long d'une ligne de courant, après projection sur $d\vec{\ell}$ se réduisent à :

$$\begin{cases} \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right).d\vec{\ell} = -\frac{1}{\rho}\left(\overrightarrow{grad}(p)\right).d\vec{\ell} - \left(\overrightarrow{grad}(g\ x_3)\right).d\vec{\ell} \\ car \\ \overrightarrow{rot}(\vec{V}) \wedge \vec{V} \text{ est perpendiculaire à } \vec{V}, \text{et } \vec{V} \text{ est colinéaire à } d\vec{\ell} \end{cases}$$

Puisqu'il n'y a qu'une coordonnée de l'espace, l'équation précédente devient si on pose $x_3 = z$:

$$\frac{d}{d\ell}\left(\frac{V^2}{2}\right).d\ell + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\ell}d\ell + g\frac{d(z)}{d\ell}d\ell = d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + gdz = 0$$

Dans cette équation différentielle du 1er ordre, la masse volumique ρ n'est pas constante. Donc, cette équation ne peut être intégrée directement.

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

D'où :

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right)+\frac{dp}{\rho}+gdz=0$$

Dans cette équation, on aperçoit les termes d'*énergie cinétique* et d'*énergie potentielle* du gaz qui découlent directement du *premier principe généralisé de la thermodynamique* établi pour un système ouvert.

L'enthalpie *H*, est définie par :

$$H=U+p\,\mathrm{v}$$

Sa variation élémentaire *dH* s'écrit :

$$dH=d(U+p\mathrm{v})=dU+p\,d\mathrm{v}+\mathrm{v}\,dp=\delta W+\delta Q+p\,d\mathrm{v}+\mathrm{v}\,dp$$

$$=-p\,d\mathrm{v}+\delta Q+p\,d\mathrm{v}+\mathrm{v}\,dp=\delta Q+\mathrm{v}\,dp$$

Donc :

$$dH=\delta Q+\mathrm{v}\,dp=\delta Q+\frac{m}{\rho}\,dp \quad \text{ou bien} \quad d\overline{H}=\delta\overline{Q}+\overline{\mathrm{v}}\,dp=\delta\overline{Q}+\frac{dp}{\rho}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Soit :

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right)+\frac{dp}{\rho}+gdz=d\left(\frac{V^2}{2}\right)+\left(d\overline{H}-\delta\overline{Q}\right)+gdz=0$$

Comme l'écoulement de fluide est supposé *adiabatique*, donc $\delta\overline{Q}=0$**. D'où :**

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right)+d\overline{H}+gdz=0$$

Après intégration, on obtient :

$$\frac{V^2}{2}+\overline{H}+g\,z=Cste$$

Cette équation traduit la *conservation de l'énergie d'un fluide en écoulement* (énergie mécanique et énergie thermique (*enthalpie massique*)), quand on ne lui apporte aucune énergie extérieure : *ni énergie mécanique, ni chaleur*.

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Comme par hypothèse, le ***fluide est supposé parfait lors de l'écoulement*** **(*sans viscosité, ou sans frottement ou bien sans énergie dissipative*), alors dans ce cas on a :**

$$\overline{H} = \overline{C}_p\, T + Cte = \frac{\gamma}{\gamma - 1} rT + Cte = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p\overline{\mathrm{v}} + Cte = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + Cte$$

D'où l'équation précédente devient :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + g\, z = Cste$$

Équation de Saint-Venant

***Cette relation est à la base de toute l'aérodynamique des écoulements à grande vitesse*. En général, on peut *négliger le terme d'énergie potentielle du à la pesanteur*, et on écrit :**

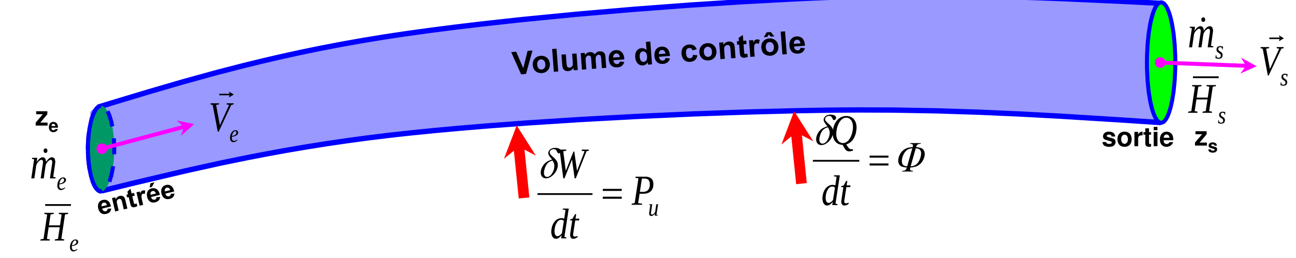
$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = Cste$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

La *relation de Saint-Venant* peut être également obtenue à partir de l'expression du *premier principe généralisé de la thermodynamique pour un système ouvert*. En effet, pour un écoulement en régime permanent, on a :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{Volume\ \ de\ \ Contrôle}=\frac{\delta W}{dt}+\frac{\delta Q}{dt}+\dot{m}_e\left(\overline{H}_e+\frac{V_e^2}{2}+g\,z_e\right)-\dot{m}_s\left(\overline{H}_s+\frac{V_s^2}{2}+g\,z_s\right)=0$$



Dans cette relation, P_u et Φ représentent respectivement les puissances et *mécanique* et *calorifique* apportées au volume de contrôle pendant l'unité de temps, $\dot{m}_e$ et $\dot{m}_s$ sont les débits massiques entrant et sortant de ce volume.

- **Si le régime est permanent** $\Rightarrow \dot{m}_e=\dot{m}_s$
- **Si l'écoulement est adiabatique et s'il n'y a pas de travail de frottement** $\Rightarrow \frac{\delta W}{dt}=\frac{\delta Q}{dt}=0$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Ainsi, l’expression précédente obtenue *à partir du premier principe de la thermodynamique généralisé pour les systèmes ouverts* s’écrit :

$$\left(\overline{H}_e + \frac{V_e^2}{2} + g\,z_e\right) - \left(\overline{H}_s + \frac{V_s^2}{2} + g\,z_s\right) = 0 \quad \textbf{ou encore} \quad \boxed{\overline{H} + \frac{V^2}{2} + g\,z = Cste}$$

Cette *relation est très générale*. Comme nous l'avons vu précédemment, c'est elle qui conduit, en *fluide incompressible*, à la *formule de Bernoulli* ($\overline{H} = p/\rho_0 + Cste$).

- **Si l'écoulement *du gaz parfait* est *adiabatique* et de plus *réversible* (ce qui est l'hypothèse généralement utilisée), les lois d'adiabaticité réversible :**

$$\begin{cases} p\overline{\mathrm{v}}^{\gamma} = \dfrac{p}{\rho^{\gamma}} = Cste \\ p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\,T = Cste \end{cases}$$

Sont alors aussi applicables.

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

3. Application aux écoulements supersoniques

3.1. *Notions sur les écoulements supersoniques*

Les *écoulements supersoniques* sont des *écoulements à grande vitesse d'un gaz ou d'une vapeur*, fluides pour lesquels les *effets de la pesanteur peuvent le plus souvent être négligés*.

Dans le cas de l'*air* et des *gaz de combustion*, l'expérience montre que l'hypothèse d'*écoulement adiabatique réversible* d'un *gaz parfait est bien vérifiée*. On se limitera alors dans notre cours à l'étude de ce cas qui correspond aux *souffleries supersoniques* et aux *lancements de fusées*.

Les relations liant la pression p, la masse volumique ρ, la température T et la vitesse V sont alors :

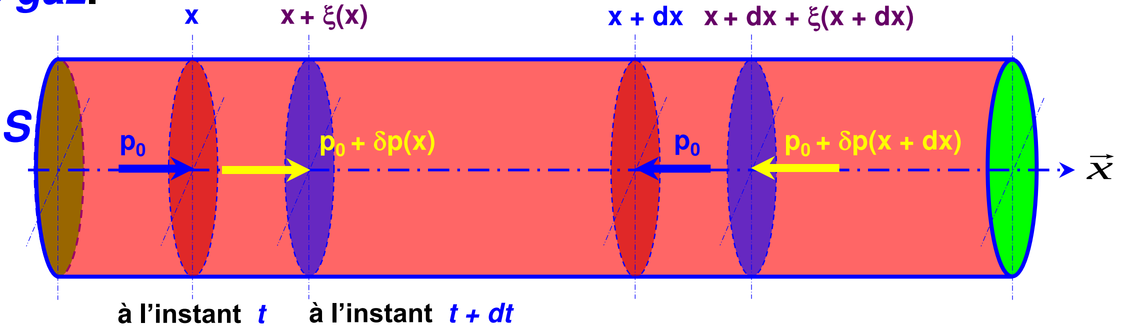
- L'*équation d'état du gaz parfait* ⟹ $p/\rho = (R/M)T = rT$
- La *relation d'adiabacité réversible* (isentropique) ⟹ $\frac{p}{\rho^{\gamma}} = Cste$
- La *relation de Saint-Venant* *écrite sous ses deux formes équivalentes* :

$$\frac{V^2}{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{p}{\rho} = Cste \quad \text{ou bien} \quad \frac{V^2}{2} + \overline{C}_p\, T = Cste$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Comme la vitesse *V* de l'écoulement de gaz est voisine de celle du *son*, il est alors *important de la déterminer* en se référant à la *propagation d'une onde plane dans une colonne de gaz*.



Le *principe fondamental de la dynamique* s'écrit :

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = (\rho\, S\, dx)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\vec{x} = \Big(\big(p_0 + \delta p(x)\big) - \big(p_0 + \delta p(x+dx)\big)\Big) S\,\vec{x} = -\frac{\partial \delta p(x)}{\partial x}\, dx\, S\,\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial\big(\delta p(x)\big)}{\partial x}$$

La propagation d'une onde plane s'effectue *sans échange de chaleur*, c'est-à-dire de manière *adiabatique* (réversible). La relation entre la variation de pression *δp* (*dp*) et la variation du volume (*dv*) de la tranche de fluide est déduite de *pv^γ = Cste*

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

$$p\,\mathrm{v}^{\gamma} = Cste \;\Rightarrow\; \frac{dp}{p} + \gamma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} = 0$$

$$\Rightarrow\; \delta p = dp = -\gamma\, p\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} = -\gamma\, p\frac{d\bar{\mathrm{v}}}{\bar{\mathrm{v}}} = -\gamma\, p\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = -\gamma\, p\,\rho\left(\frac{-d\rho}{\rho^2}\right) = +\gamma\, p\frac{d\rho}{\rho}$$

or : $\mathrm{v} = S\,x \;\Rightarrow\; d\mathrm{v} = S\,dx = S\left(\left(x+dx+\xi(x+dx)\right)-\left(x+\xi(x)+dx\right)\right) = S\,\frac{\partial\xi}{\partial x}dx$

donc : $\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \frac{\partial\xi}{\partial x}$ **et** $\delta p = dp = -\gamma\, p\frac{\partial\xi}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} = -\gamma\, p\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

Comme on a : $\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial(\delta p(x))}{\partial x} \;\Rightarrow\; \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \gamma\, p\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ **ou bien** $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \gamma\frac{p}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

On pose : $a = \sqrt{\frac{\gamma\, p}{\rho}} \;\Rightarrow$ ***vitesse de propagation de l'onde*** (**vitesse du son**)

Donc : $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

Comme : $p\,\mathrm{v}^{\gamma} = Cste$ (**isentropique**) $\Rightarrow \frac{p}{\rho^{\gamma}} = Cste \Rightarrow \frac{dp}{p} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = 0 \Rightarrow \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma\frac{R\,T}{M} = \gamma\, r\,T = a^2 \Rightarrow$

$$a = \sqrt{\gamma\, r\,T} = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S} = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

On appelle ***nombre de Mach*** de l'écoulement, le rapport :

$$M = \frac{V}{a}$$

- V → vitesse locale de l'écoulement de gaz
- a → vitesse locale du son

- Si $V < a$ ($M < 1$) → ***Écoulement subsonique***
- Si $V = a$ ($M = 1$) → ***Écoulement sonique***
- Si $V > a$ ($M > 1$) → ***Écoulement supersonique***

Selon l'équation de ***Saint-Venant***, la température d'un écoulement isentropique évolue avec **sa vitesse**. Il en est de même pour la ***vitesse du son a*** :

$$a = \sqrt{\gamma \, r \, T}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Existence d'une vitesse limite pour le gaz *(supposé parfait et en écoulement isentropique)* **:**

p_i, ρ_i, T_i, et $V_i = 0$ sont les conditions génératrices

Fluide parfait en écoulement isentropique ⟹ $p\bar{v}^{\gamma} = \dfrac{p}{\rho^{\gamma}} = Cste$ ou $p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T = Cste$

Saint-Venant ⟹ $$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{V_i^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_i}{\rho_i} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_i}{\rho_i}$$ ou $$\frac{V^2}{2} + \bar{C}_p T = \bar{C}_p T_i$$

Si a est la vitesse du son, on écrit : $a = \sqrt{\dfrac{\gamma\, p}{\rho}} = \sqrt{\gamma\, r\, T}$

Donc, Saint-Venant devient : $V^2 + \dfrac{2}{\gamma-1}a^2 = \dfrac{2}{\gamma-1}a_i^2$ ⟹ $$\frac{V^2}{a^2} + \frac{2}{\gamma-1} = \frac{2}{\gamma-1}\frac{a_i^2}{a^2}$$

Or, le nombre de Mach M est : $M = \dfrac{V}{a}$ ⟹ $$M^2 + \frac{2}{\gamma-1} = \frac{2}{\gamma-1}\frac{T_i}{T}$$

ou encore : $$\frac{T_i}{T} = 1 + M^2\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Fluide parfait en écoulement isentropique ⇒ $p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = p_i^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_i$ **ou** $\frac{T}{T_i} = \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

Or, le théorème de *Saint-Venant* s'écrit également :

$$\frac{V^2}{2} + \overline{C}_p T = \overline{C}_p T_i \Rightarrow V^2 = 2\overline{C}_p\left(T_i - T\right) = 2\frac{r\gamma}{\gamma-1}\left(T_i - T\right) = 2\frac{r\gamma}{\gamma-1}T_i\left(1-\frac{T}{T_i}\right)$$

$$V^2 = 2\frac{r\gamma}{\gamma-1}T_i\left(1-\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_i}{\rho_i}\left(1-\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

car $a = \sqrt{\gamma r T} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_i}{\rho_i}\left(1-\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}$$

C'est la vitesse *V* établie en fonction des *conditions génératrices* de l'écoulement

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Comme $$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_i}{\rho_i}\left(1-\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}$$

Cela veut dire que pour un écoulement où la *détente pourrait être poussée jusqu'à une pression nulle* (*p = 0*), la *vitesse limite V_ℓ* en ce point serait :

$$V_\ell = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_i}{\rho_i}} = \sqrt{\frac{2\gamma r T_i}{\gamma-1}} = a_i\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$$

Pour le cas de l'air, par exemple, nous avons :

$$\gamma = 1{,}40 \quad \text{et} \quad r = \frac{R}{M_{air}} = \frac{8{,}32}{29\;10^{-3}} \approx 286{,}89\; J.kg^{-1}.K^{-1}$$

Ainsi, pour *T = 20 °C = 293 K*, on a :

$$V_\ell = \sqrt{\frac{2\gamma r T_i}{\gamma-1}} = 2{,}23\, a_i = \sqrt{\frac{2\times 1{,}40\times 286{,}69\times 293}{1{,}40-1}} = 766{,}81\; m/s$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

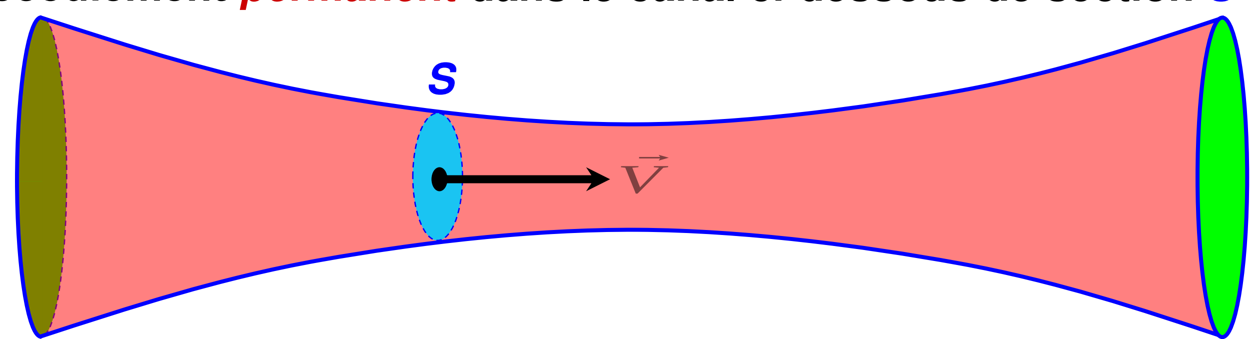
ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

3.2. Écoulement monodimensionnel permanent dans une tuyère

3.2.1. Théorème de HUGONIOT

Quelle *relation* liant la *vitesse de l'écoulement de gaz* dans la tuyère à *sa section* ?

Soit l'écoulement *permanent* dans le canal ci-dessous de section S variable.



Le *débit massique* à travers la section S est : $\dot{m} = \rho\, S\, V$

Comme ce *débit massique* se conserve, alors en différentiant son expression, on a :

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dV}{V} = 0$$

Or, en l'absence de *forces à distance*, on a :

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{dP}{\rho} = V\ dV + \frac{dP}{\rho} = 0$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Mais comme l'écoulement est *isentropique*, on peut remplacer *dp* par son expression en fonction de *dρ* obtenue de la valeur de la vitesse du son *a* :

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S} \Rightarrow a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S$$

Donc : $dp = a^2 \, d\rho$

Ainsi, l'équation établie précédemment devient alors :

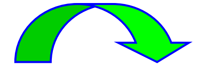
$$V\,dV + \frac{dP}{\rho} = V\,dV + a^2\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

ou bien $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V}{a^2}dV$

Or : $\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow -\frac{V}{a^2}dV + \frac{dS}{S} + \frac{dV}{V} = 0$

ou encore : $\frac{dS}{S} + \frac{dV}{V}\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) = 0$

Soit : $$\frac{dS}{dV} = \frac{S}{V}\left(M^2 - 1\right)$$



C'est la formule de HUGONIOT

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Formule de HUGONIOT

$$\frac{dS}{dV} = \frac{S}{V}\left(M^2 - 1\right)$$

Si *V < a* ou *M < 1* (*écoulement subsonique*) ⇒ *dS/dV* est négatif : *la vitesse augmente si la section diminue*

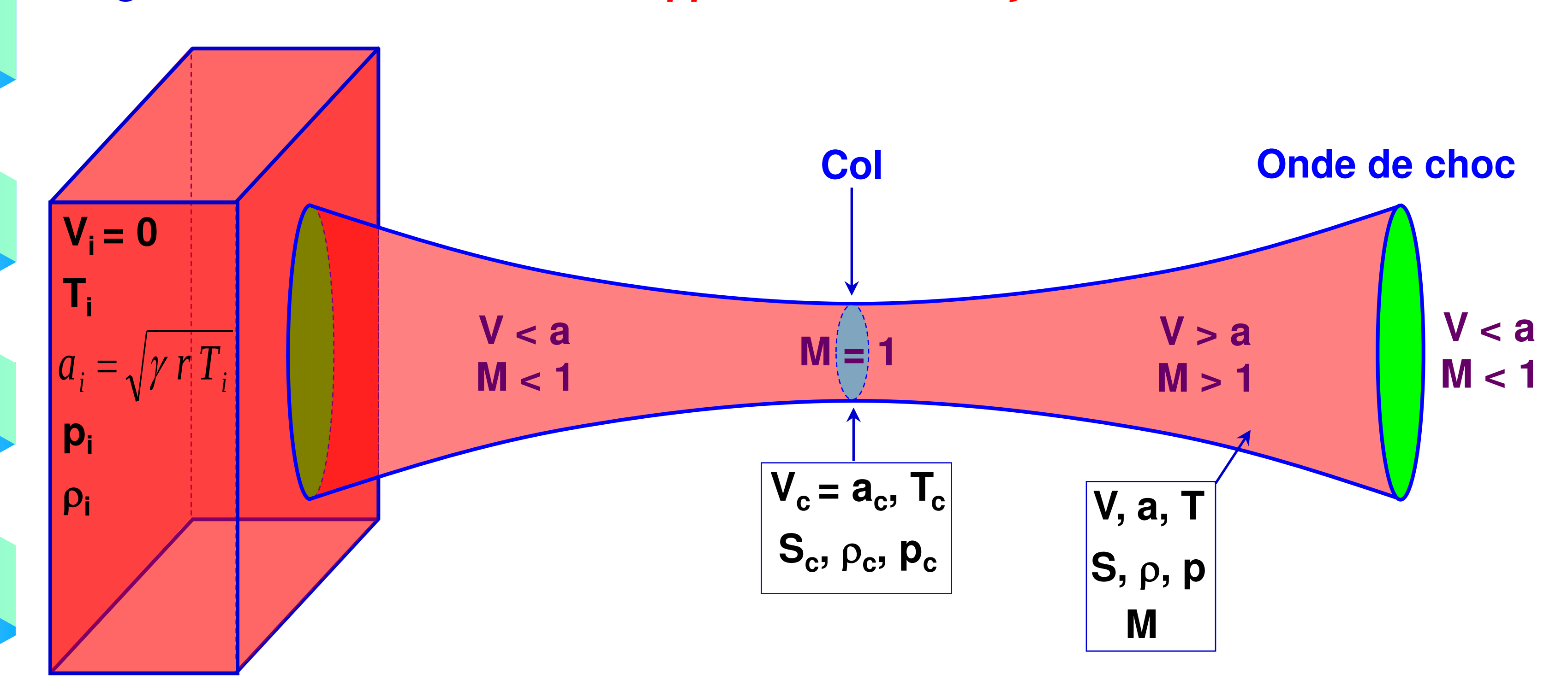
Si *V = a* ou *M = 1* (*écoulement sonique*) ⇒ *(dS/dV) = 0* : *la section est minimale lorsque la vitesse V atteint la celle du son (M = 1)*

Si *V > a* ou *M > 1* (*écoulement supersonique*) ⇒ *dS/dV* est positif : *pour que la vitesse V croisse, la section doit augmenter*

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

On appelle ***tuyère supersonique***, un canal qui permet d'obtenir un ***écoulement supersonique à partir d'un gaz au repos***. Cette tuyère doit être d'abord ***convergente*** puis ***divergente***. Sa ***section minimale***, **où la vitesse de l'écoulement est égale à la vitesse du son**, est ***appelée col de la tuyère***.

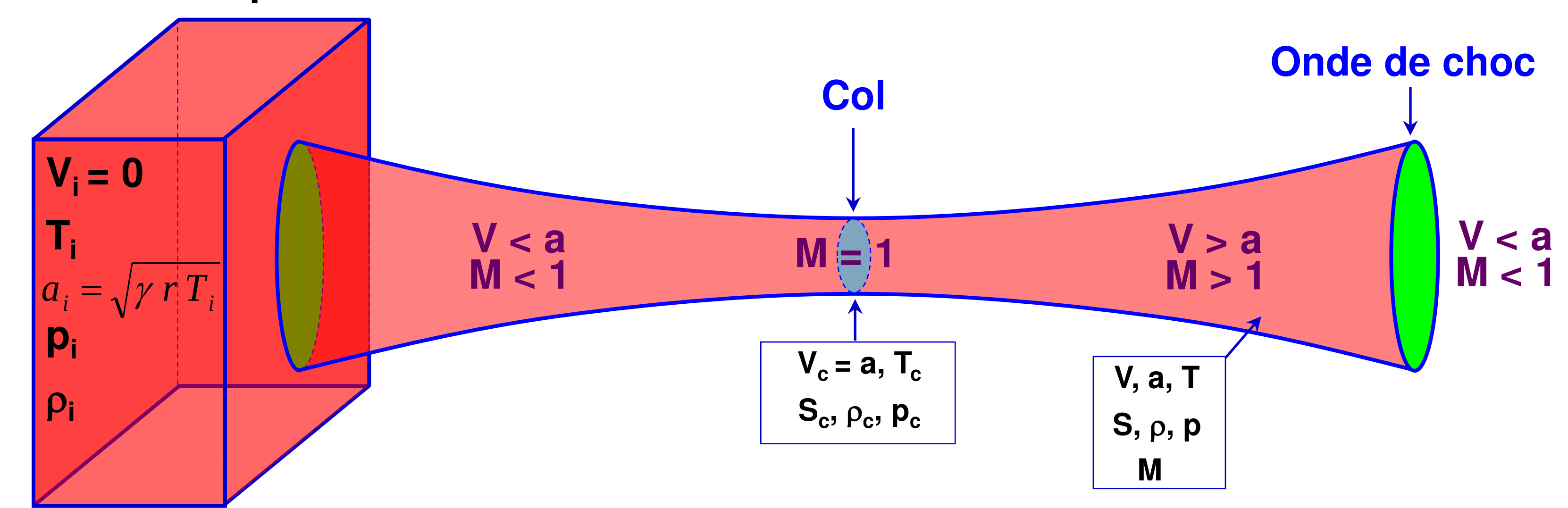


DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

Le gaz au repos dans les conditions ρ_i, p_i, T_i se détend ***adiabatiquement*** dans la tuyère. Sa vitesse atteint la **vitesse du son** (***M = 1***) **au col**, où les caractéristiques sont ρ_c, p_c, T_c, $V_c = a_c$. L'écoulement continue ensuite à s'accélérer dans la partie divergente de la tuyère jusqu'à atteindre le nombre de ***Mach M désiré*** ; les caractéristiques devenant alors ρ, p, T, V, a.

En général, l'écoulement redevient ensuite ***subsonique*** en formant une ***onde de choc droite*** qui sera étudiée dans la suite.



DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

3.2.2. Étude des grandeurs caractéristiques au col d'une tuyère supersonique

En écrivant l'équation d'état du gaz parfait, la relation d'adiabaticité et l'équation de Saint-Venant pour les états du gaz au repos et au col de la tuyère, on obtient :

$$\frac{T_c}{T_i} = \frac{a_c^2}{a_i^2} = \frac{2}{\gamma+1} \qquad \frac{\rho_c}{\rho_i} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad \frac{p_c}{p_i} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Dans le cas de l'air ($\gamma = 1{,}40$), on obtient :

$$\frac{T_c}{T_i} = 0{,}833 \qquad \frac{\rho_c}{\rho_i} = 0{,}634 \qquad \frac{p_c}{p_i} = 0{,}528$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

3.2.3. Grandeurs caractéristiques dans la tuyère où le nombre de Mach est M

On écrit la *relation de Saint-Venant* entre le gaz au repos et l'écoulement ayant atteint Mach *M*, en tient compte des relations suivantes :

$$V = M\,a \quad \text{et} \quad a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma\, r\, T$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{T}{T_i} = \frac{a^2}{a_i^2} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \qquad \frac{\rho}{\rho_i} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \qquad \frac{p}{p_i} = \left(\frac{2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

3.3. Étude de l'onde de choc droite

L'onde de choc est une zone de l'écoulement *où l'évolution des grandeurs caractéristiques est très rapide* : son *épaisseur est très faible*. Dans le cas d'une onde de choc droite, on assimile le plus souvent celle-ci à une surface de discontinuité à travers laquelle un écoulement supersonique redevient subsonique.

L'onde de choc est le siège de *phénomènes irréversibles*, et on peut montrer que l'entropie du fluide augmente lors de la traversée de l'onde de choc. En effet, à la traversée de l'onde de choc, l'écoulement reste adiabatique, mais non isentropique (*adiabatique irréversible*).

Pour l'onde de choc, on peut toujours écrire l'équation de *Saint-Venant* (qui traduit la *conservation de l'énergie dans l'écoulement*), mais du fait de la non réversibilité du phénomène, la loi : $p\,\rho^{-\gamma} = Cste$ *n'existe plus*

L'étude de l'onde de choc s'effectue donc en écrivant les équations de *conservation de la masse*, de la *quantité de mouvement*, et de *conservation de l'énergie à travers le choc*.

On se *limite à l'étude de l'onde de choc droite*, c'est-à-dire au cas où la surface de discontinuité est un plan orthogonal à la direction de l'écoulement. On repèrera par l'indice 1 les grandeurs avant le choc, et par l'indice 2 celles après le choc.

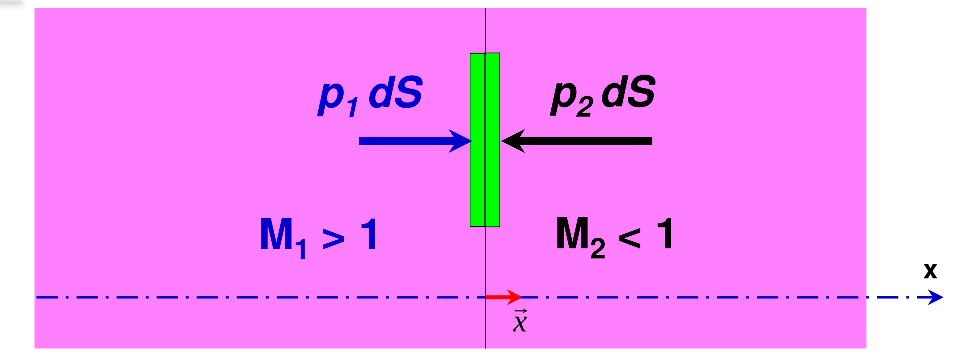
DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

3.3.1. Conservation de la masse

$$d\dot{m} = \rho_1\ V_1\ \ dS = \rho_2\ V_2\ \ dS$$

$$\rho_1\ V_1\ = \rho_2\ V_2$$



Volume de contrôle

3.3.2. Conservation de la quantité de mouvement

On applique le *théorème d'Euler* sur le volume de contrôle :

$$\left(p_1 - p_2\right) dS\ \vec{x} = \iint_S \rho \vec{V}\left(\vec{V}.\vec{n}\right) dS = \left(\rho_2\ V_2^2 - \rho_1\ V_1^2\right) dS\ \vec{x} \Rightarrow p_1 + \rho_1\ V_1^2 = p_2 + \rho_2\ V_2^2$$

3.3.3. Conservation de l'énergie

L'équation de *Saint-Venant* qui traduit la conservation de l'énergie de l'unité de masse de fluide reste *vérifiée à travers l'onde de choc* :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_2}{\rho_2}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

3.3.4. Relation de Prandtl

L'équation d'Euler s'écrit :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 \quad \Rightarrow \quad V_2 - V_1 = \frac{p_1}{\rho_1 V_1} - \frac{p_2}{\rho_2 V_2}$$

Or, la vitesse du son est donnée par l'expression : $a^2 = \dfrac{\gamma p}{\rho}$

Donc, l'équation d'Euler devient :

$$\gamma (V_2 - V_1) = \frac{\gamma p_1}{\rho_1 V_1} - \frac{\gamma p_2}{\rho_2 V_2} = \frac{a_1^2}{V_1} - \frac{a_2^2}{V_2}$$

L'équation de Saint-Venant devient également :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_2}{\rho_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{V_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{\gamma - 1}$$

$$a_1^2 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) V_1^2 = a_2^2 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) V_2^2 = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) a_c^2$$

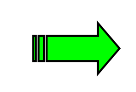
$$a_1^2 = a_2^2 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\left(V_2^2 - V_1^2\right)$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

D'où l'équation d'Euler :

$$V_2 - V_1 = \frac{p_1}{\rho_1 V_1} - \frac{p_2}{\rho_2 V_2}$$



$$\gamma\left(V_2 - V_1\right) = \frac{\gamma\, p_1}{\rho_1 V_1} - \frac{\gamma\, p_2}{\rho_2 V_2} = \frac{a_1^2}{V_1} - \frac{a_2^2}{V_2}$$

$$\gamma\left(V_2 - V_1\right) = \frac{a_2^2 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(V_2^2 - V_1^2\right)}{V_1} - \frac{a_2^2}{V_2} = \frac{\left(V_2^2 - V_1^2\right)}{V_1}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) + \frac{a_2^2}{V_1} - \frac{a_2^2}{V_2} = \frac{\left(V_2 - V_1\right)\left(V_2 + V_1\right)V_2}{V_1 V_2}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) + a_2^2\left(\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2}\right)$$

$$\gamma = \frac{\left(V_2 + V_1\right)V_2}{V_1\, V_2}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) + \frac{a_2^2}{V_1\, V_2}$$

$$V_1 V_2 = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\underbrace{\left(V_2^2\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) + a_2^2\right)}_{=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)a_c^2} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)a_c^2 = a_c^2$$

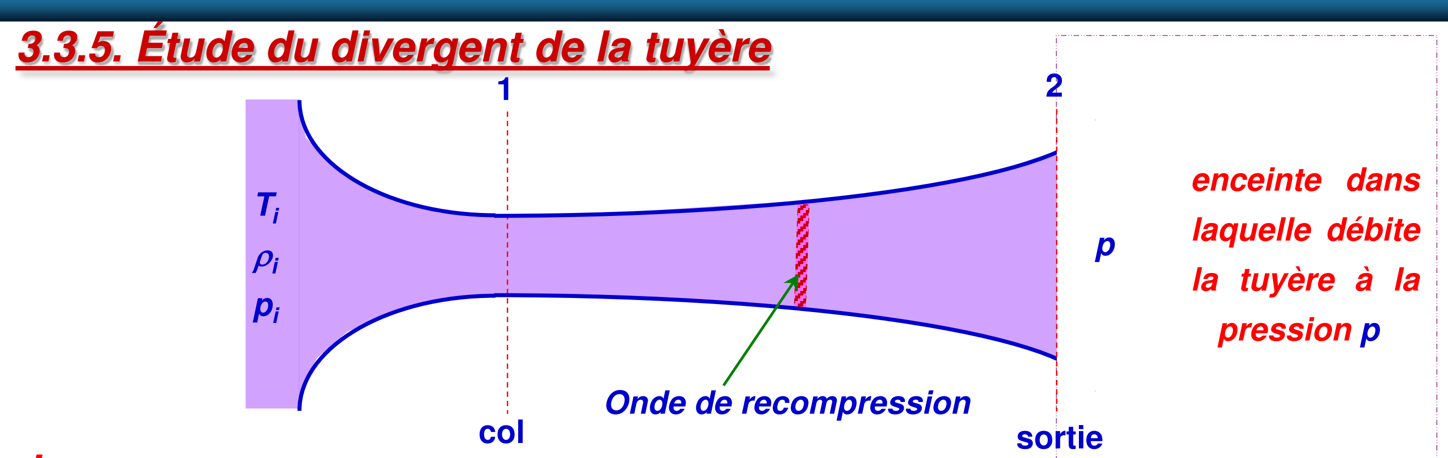
Le produit des vitesses de l'écoulement en amont et en aval du choc, est égal au carré de la vitesse du son au col de la tuyère :

$$V_1\ V_2 = a_c^2$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

3.3.5. Étude du divergent de la tuyère



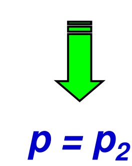
Premier cas :

$V_1 < a_1$ → Écoulement compressible *analogue* à celui des *fluides incompressibles*

(où a_1 *vitesse du son au col*)

↓

La *pression augmente* et la *vitesse diminue* le long du divergent

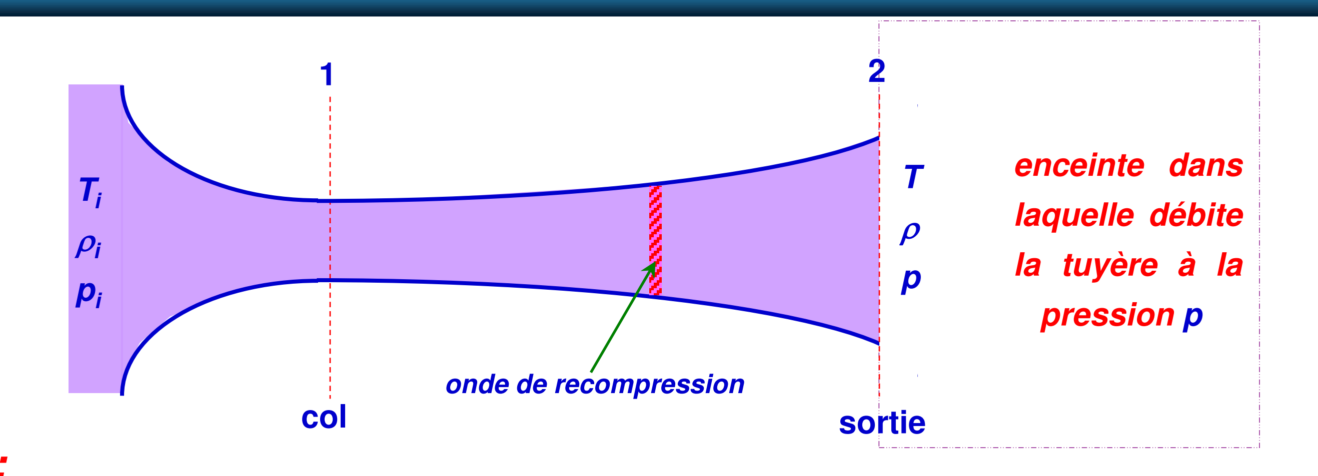


$p = p_2$

Remarque : La discontinuité de la pression à la sortie provoque une *onde de recompression* qui pourrait modifier les conditions de l'écoulement

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)



Second cas :

$V_1 = a_1$ ⟹ D'après le **théorème de HUGONIOT**, V_1 ne peut être supérieure à a_1 au niveau du **col** de la tuyère où la **section est minimale**.

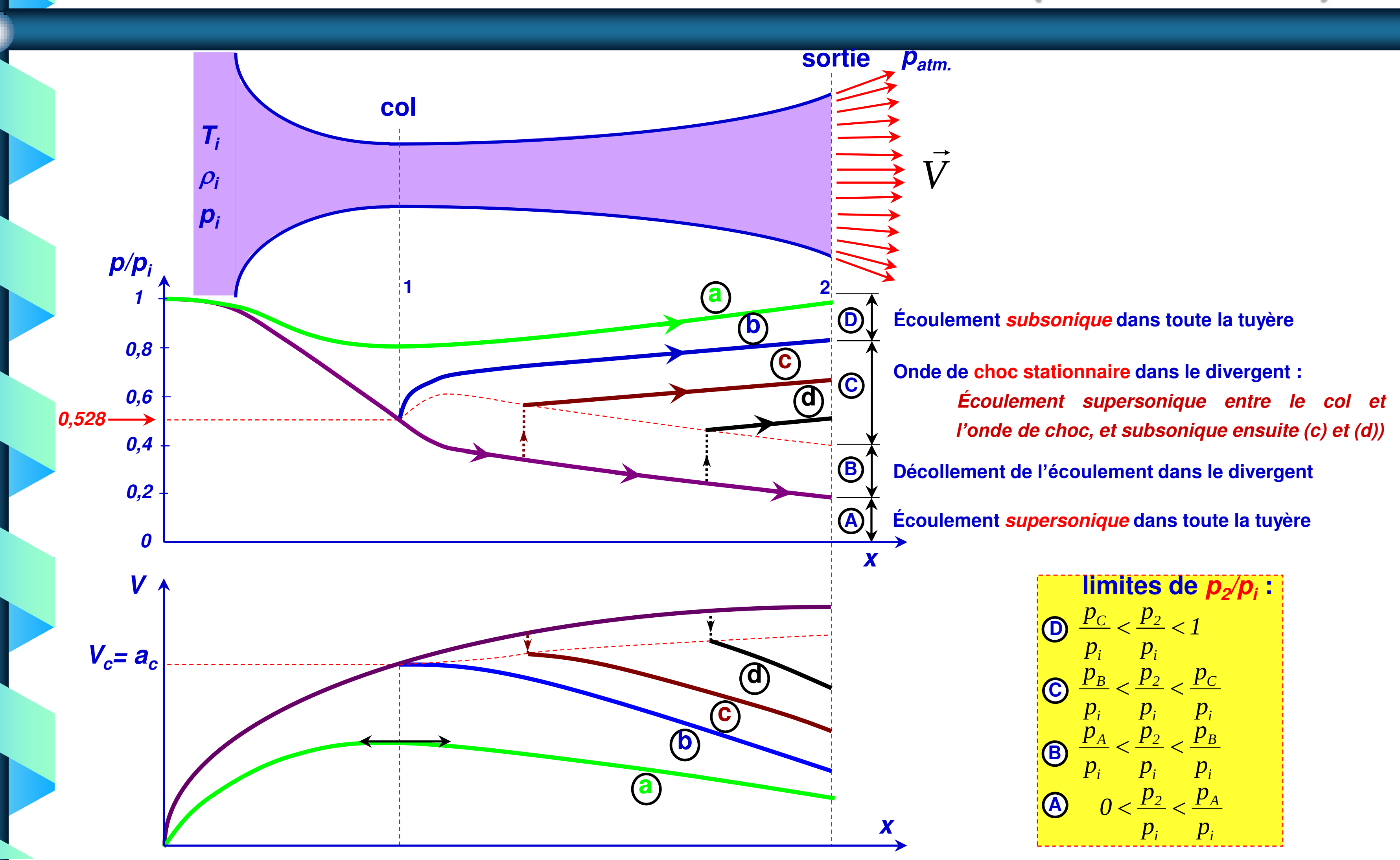
(où a_1 *vitesse du son au col*)

Dans ce cas, la *pression* continue à *augmenter* et la *vitesse diminue* tout au long du divergent, et 3 cas sont possibles :

- $p_2 = p$ ⟹ ***M peut être calculé à partir de Saint-Venant :*** $\frac{T_i}{T} = 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M^2 = \left(\frac{p_i}{p}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}$ ⟹ $M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p_i}{p}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} - 1\right)}$
- $p_2 > p$ ⟹ ***le jet se dilate à la sortie, et crée une onde de dépression, qui ne peut remonter le courant et modifier l'écoulement***
- $p_2 < p$ ⟹ ***il se produit une onde de recompression à la sotie, qui remonte le courant dans le divergent et provoque une élévation de la température.***

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

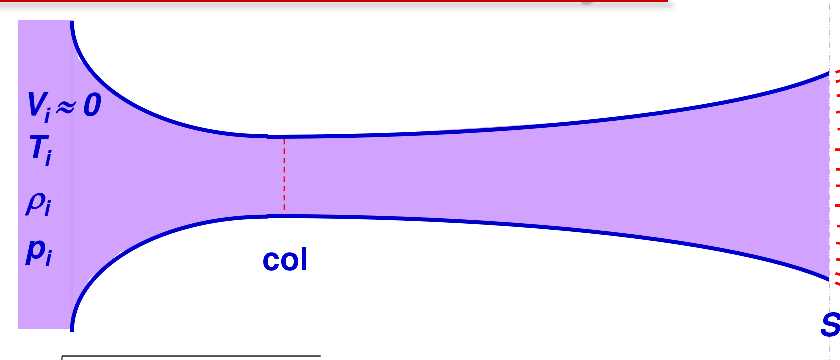


DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)



3.3.6. Calcul du débit dans la tuyère



S

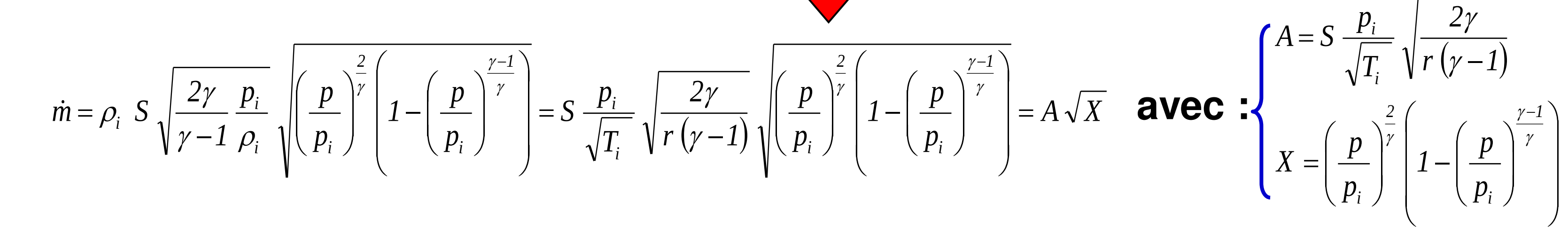
$\vec{V}$ p ρ T

enceinte dans laquelle débite la tuyère à la pression p

On a :

$$\begin{cases} V = \sqrt{\left(\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\dfrac{p_i}{\rho_i}\left(1-\left(\dfrac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \\ \rho = \rho_i \left(\dfrac{p}{p_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{cases}$$

$$\dot{m} = \rho\, S\, V = S\, \rho_i \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{p_i}{\rho_i}\left(1-\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}$$



$$\dot{m} = \rho_i\, S \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_i}{\rho_i}} \sqrt{\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left(1-\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} = S\,\frac{p_i}{\sqrt{T_i}}\sqrt{\frac{2\gamma}{r\,(\gamma-1)}} \sqrt{\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left(1-\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} = A\sqrt{X}$$

avec :

$$\begin{cases} A = S\,\dfrac{p_i}{\sqrt{T_i}}\sqrt{\dfrac{2\gamma}{r\,(\gamma-1)}} \\ X = \left(\dfrac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left(1-\left(\dfrac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \end{cases}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL EN RÉGIME PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE (GAZ PARFAIT)

$$\dot{m} = \rho_i\, S \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_i}{\rho_i}} \sqrt{\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left(1-\left(\frac{p}{\rho_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} = S\,\frac{p_i}{\sqrt{T_i}}\sqrt{\frac{2\gamma}{r(\gamma-1)}}\sqrt{\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left(1-\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} = A\sqrt{X}$$

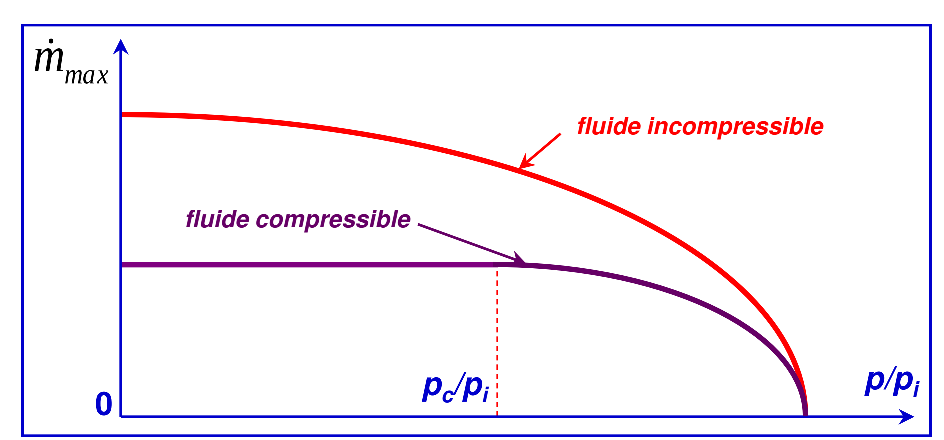
avec : $\begin{cases} A = S\,\dfrac{p_i}{\sqrt{T_i}}\sqrt{\dfrac{2\gamma}{r(\gamma-1)}} \\ X = \left(\dfrac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left(1-\left(\dfrac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \end{cases}$

Le débit $\dot{m}_{max}$ *est maximal* si *X est maximal*, et *X* est maximal si : *$dX/dp = 0$*

$$\Rightarrow \quad p = p_i\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

expression de la pression critique p_c

Donc : $\begin{cases} V = \sqrt{\left(\dfrac{2(p_i-p)}{\rho_i}\right)} = \sqrt{2\,\dfrac{p_i}{\rho_i}\left(1-\left(\dfrac{p}{p_i}\right)\right)} \\ \dot{m}_{max} = S\,\dfrac{}{\sqrt{T_i}}\sqrt{2\,\dfrac{p_i}{\rho_i}.\left(1-\left(\dfrac{p}{p_i}\right)\right)} \end{cases}$



Le débit massique maximal est obtenu quand les caractéristiques du fluide à l'extrémité de la tuyère sont égales à celles de l'état critique (vitesse du fluide égale à la vitesse du son : M=1).

Chapitre 2

Fluide idéal isovolume : Ecoulements rotationnels

Chapitre II

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

1. Introduction

En mécanique des fluides, et dans la plupart des situations, il est intéressant d'interpréter les événements dans un écoulement en terme de *rotation*.

Dans ce chapitre, on se limite à l'étude de la dynamique de cet écoulement tout en s'intéressant aux *interactions entre ce dernier et les événements qui s'y associent*. L'objectif, est de déterminer une certaine *distribution de cette rotation*.

Ainsi, parler de la *rotation* du fluide revient à parler du *rotationnel du vecteur-vitesse*, ou encore du *rotationnel* tout court. Et parler du *rotationnel*, revient à évoquer la *rotation d'une petite ou grande partie de l'écoulement*. Cette *rotation* se traduit par des *tourbillons ou structures tourbillonnaires*, appelés *vorticité* (provenant du mot latin *vortex*).

Donc, la *vorticité* est une formulation mathématique de la *dynamique des fluides relié à la quantité de vitesse angulaire ou de rotation* que subit un fluide *localement*.

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

2. Définition du vecteur tourbillon

Soit $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$ **un vecteur vitesse. Le rotationnel de** $\vec{U}$ **est défini par :**

$$\overrightarrow{rot}(\vec{U}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Un écoulement est dit rotationnel, cela signifie que :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{U}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} \neq \vec{0}$$

Le vecteur taux de rotation d'une particule fluide, est noté $\vec{\omega}$**. Celui-ci est donc le demi-rotationnel :**

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{rot}(\vec{U}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{U}$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Si on désigne par $\vec{U}$ le vecteur vitesse d'un point *M* d'une région d'un fluide où l'écoulement se fait sans déformation (c'est à dire comme un solide), on peut alors écrire :

$$\vec{U}(M)=\vec{U}(O)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

avec : → ***O*** **: Origine**
→ $\vec{\omega}$ **: taux de rotation ou vecteur instantanné de rotation**

Dans le cas d'une rotation pure, nous avons : $\vec{U}(O)=\vec{0}$ **et** $\vec{U}(M)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$

Si le vecteur taux de rotation $\vec{\omega}$ est dirigé suivant l'axe $\overrightarrow{Ox_3}$, donc :

$$\vec{U}(M)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega.x_2\\\omega.x_1\\0\end{pmatrix}\quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}(\vec{U})=\vec{\nabla}\wedge\vec{U}=\begin{pmatrix}0\\0\\2.\omega\end{pmatrix}=2.\vec{\omega}$$

D'où : $\vec{\omega}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{rot}(\vec{U})=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{U}$ **est appelé *vecteur tourbillon***

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

3. Flux du rotationnel du vecteur-vitesse

D'après le *théorème de Green*, le flux du rotationnel à travers une surface fermée (F) peut s'écrire :

$$\int_F \overrightarrow{rot}\,(\vec{U}\,).\vec{n}.dS = \int_D div\left(\overrightarrow{rot}\,(\vec{U}\,)\right).d\upsilon$$

Or, la divergence du rotationnel est nulle en tout point où le vecteur-vitesse a des dérivées régulières :

$$div\left(\overrightarrow{rot}\,(\vec{U}\,)\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = 0$$

Il en résulte alors que le *flux du rotationnel à travers la surface fermée (F) est donc nul*.

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Remarque :

En France, on appelle souvent $\vec{\omega}$ ***vecteur tourbillon***, mais il y a d'autres usages du mot « ***tourbillon*** » ; ce qui entraine parfois des confusions.

Dans ce qui suit, nous allons considérer ***un domaine (D) limité par une surface fermée (F)***, ***régulière par morceaux***. Ainsi, ***le vecteur-vitesse est considéré dans le domaine comme une fonction régulière des coordonnées x_i*** (où i =1,2,3).

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

4. Circulation du vecteur-vitesse

On appelle circulation Γ du vecteur $\vec{U}$ le long d'une courbe (C), dont l'élément d'arc est $d\vec{\ell}$, l'intégrale curviligne du produit scalaire $\vec{U}.d\vec{\ell}$:

$$\Gamma = \int_C \vec{U}.d\vec{\ell} = \int_C \vec{U}.d\ell.\vec{\tau}$$

où $\vec{\tau}$ est un vecteur unitaire tangent à la courbe (C).

Le *théorème de Stokes* exprime que, si le vecteur $\vec{U}$ est une fonction de point qui est régulière dans le domaine (D), la circulation du vecteur $\vec{U}$ le long d'une courbe fermée (C), régulière par morceaux et située dans le domaine (D), est égale au flux du rotationnel du vecteur $\vec{U}$ à travers toute surface ouverte (S) située dans le domaine (D) et qui a pour frontière la courbe (C) :

$$\int_C \vec{U}.d\ell.\vec{\tau} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{U}).\vec{n}.dS = 2.\iint_S \vec{\omega}.\vec{n}.dS$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Conséquence 1 :

Si l'écoulement est ***irrotationnel*** en tout point d'une surface (S) ouverte et s'appuyant sur le contour (C) fermé, la circulation du vecteur vitesse le long de la courbe (C) est nulle :

$$\int_C \vec{U}.d\ell.\vec{\tau} = 0$$

Conséquence 2 :

Si l'écoulement est ***rotationnel*** en tout point d'une surface (S) ouverte et s'appuyant sur le contour (C) fermé, on montre que :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_C \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}(\vec{U}) \wedge \vec{U} \right).\vec{\tau}.d\ell = \int_C \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}(\vec{U}) \wedge \vec{U} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{U^2}{2} \right) \right).\vec{\tau}.d\ell$$

car :

$$\int_C \overrightarrow{grad}\left(\frac{U^2}{2} \right).\vec{\tau}.d\ell = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\left(\frac{U^2}{2} \right) \right).\vec{n}.dS = 0$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

L'accélération dérive d'un potentiel :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_C \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}(\vec{U}) \wedge \vec{U} \right) . \vec{\tau} . d\ell$$

$$= \int_C \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}(\vec{U}) \wedge \vec{U} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{U^2}{2} \right) \right) . \vec{\tau} . d\ell = \frac{d}{dt} \int_C \vec{U} . \vec{\tau} . d\ell$$

$$= \int_C \vec{\gamma} . \vec{\tau} . d\ell$$

Ainsi, la dérivée matérielle de la circulation de $\vec{U}$ est égale à la circulation de l'accélération. Si le fluide est idéal, isovolume et soumis à des forces dérivant d'un potentiel, on écrit alors (selon Euler) :

$\rho . \left(\vec{\gamma} - \vec{f} \right) + \overrightarrow{grad}(p) = \vec{0}$ **où** $\vec{f} = -\overrightarrow{grad}(N)$ **est l'accélération de la pesanteur.**

Mais, comme : $\frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad}(p) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{p}{\rho} \right)$ **Donc :** $\vec{\gamma} + \overrightarrow{grad}(p/\rho) + \overrightarrow{grad}(N) = \vec{0}$

ou encore : $\vec{\gamma} = -\overrightarrow{grad}(p/\rho + N)$ **Donc, l'*accélération dérive d'un potentiel.***

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

5. Potentiel des vitesses

L'écoulement est dit ***à potentiel des vitesses*** dans un domaine (D) si, en tout point $M(x_1,x_2,x_3)$ de ce domaine et à tout instant t, on peut définir une ***fonction scalaire*** $\Phi(x_1,x_2,x_3,t)$ des coordonnées x_1, x_2, x_3 et du temps t telle que, sauf éventuellement en certains points ou en certaines lignes ou en certaines surfaces isolées, le ***vecteur vitesse au point M*** et à l'instant t ***est le gradient*** de la ***fonction*** Φ.

$$\vec{U} = \overrightarrow{grad}(\Phi)$$

Ceci se traduit par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ u_2 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} \\ u_3 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} \end{cases}$$

ou encore :

$$u_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

La fonction Φ est la ***fonction potentiel***.

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Le mot potentiel s'emploie aussi pour d'autres champs de vecteurs (pesanteur, par exemple). Dans le cas d'un ***écoulement avec potentiel des vitesses***, à un instant donné, le ***vecteur-vitesse*** est, en tout point, ***perpendiculaire à la surface équipotentielle*** :

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = Cte$$

qui passe en ce point.

Par suite, les ***lignes de courant*** sont ***orthogonales aux surfaces équipotentielles***. Le ***sens des lignes de courant*** est celui des ***Φ croissants***.

Dans un écoulement avec potentiel des vitesses, en ***coordonnées cylindriques*** (r,θ,z), les composantes de la vitesse sont u_r, u_θ et u_3. Leurs expresssions en fonction du ***potentiel*** s'écrivent :

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \qquad u_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \qquad u_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

6. Potentiel des vitesses dans le cas d'un fluide isovolume

Pour un fluide isovolume, l'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$div\left(\vec{U}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

S'il existe un potentiel des vitesses, l'équation de la conservation de la masse se traduit par :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 0$$

Dans un écoulement de fluide incompressible (isovolume), pour lequel existe un potentiel des vitesses Φ, le Laplacien $\Delta\Phi$ est nul.

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

7. Ecoulement plan d'un fluide isovolume

Puisque l'écoulement est plan (bidimensionnel), on va définir, à chaque instant t, dans un plan parallèle à l'ensemble des vecteurs-vitesses. Ce plan sera pris comme plan dans (x_1,x_2).

Dans ce plan, la vitesse $\vec{U}=(u_1,u_2,0)=(u_1,u_2)$ **est une fonction de point qui est régulière.**

Si le fluide est isovolume (qu'il soit stationnaire ou non), l'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$div\left(\vec{U}\right)=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0$$

Cette équation exprime la condition pour qu'il existe une fonction $\psi(x_1,x_2,t)$, dite fonction de courant et définie, à une constante additive près, par les expressions :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}=-u_2\\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}=u_1\end{cases}$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

La ***différentielle totale exacte*** de la fonction de courant ψ s'écrit :

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)_{x_2} .dx_1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)_{x_1} .dx_2 = -u_2 .dx_1 + u_1 .dx_2$$

En effet, l'équation de la ***conservation de la masse*** est la ***condition nécessaire et suffisante*** pour que l'expression précédente ***soit une différentielle totale exacte*** d'une fonction de x_1 et de x_2.

$$div\left(\vec{U}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 .\partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 .\partial x_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)_{x_1}\right)_{x_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)_{x_2}\right)_{x_1}$$

De la relation de dψ, ***puisqu'on a une différencielle totale excte (dψ=0)***, on peut obtenir :

$$d\psi = 0 = -u_2 .dx_1 + u_1 .dx_2 = -u_2\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)_{x_1} + u_1\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)_{x_2} = u_1\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)_{x_2} + u_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)_{x_1} = 0$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Ainsi, à un instant donné t_0, le vecteur-vitesse (u_1,u_2), *tangent à la ligne de courant*, est normal au vecteur $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)$, et lui-même normal à la ligne de courant : $\psi(x_1, x_2, t_0) = Cte$

Ceci revient à dire que les lignes de courant ont pour équation :

$$\psi(x_1, x_2, t_0) = Cte$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Calcul du débit volumique :

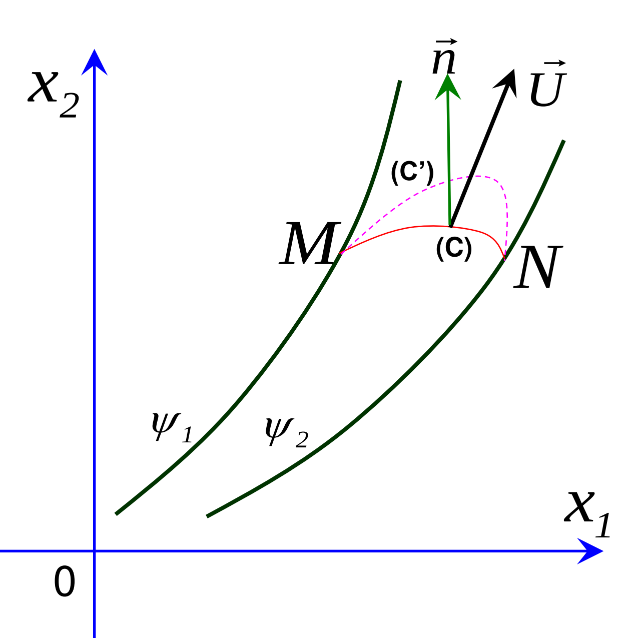
Le débit volumique Q_v par unité de longueur dans un tube de courant limité d'une part par les surfaces cylindriques perpendiculaires au plan (x_1,x_2), ayant pour directrices les lignes de courant ψ_1 et ψ_2, et d'autre part par deux plans d'écoulements distants de l'unité de longueur, est donné par :

$$Q_v = \int_C \vec{U}.\vec{n}.d\ell$$

où : $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\dfrac{dy}{d\ell} \\ \dfrac{dx}{d\ell} \end{pmatrix}$ **et** $d\ell = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$

Donc :

$$Q_v = \int_C \left(- \right).d\ell = \int_C \vec{U}.\vec{n}.d\ell$$



FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

En coordonnées cylindriques, les expressions des composantes u_r et u_θ de la vitesse $\vec{U}$ en fonction de ψ s'obtiennent facilement en remarquant que :

$$\begin{cases} u_r = u_1.\cos\theta + u_2.\sin\theta = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}.\cos\theta - \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}.\sin\theta \\ u_\theta = -u_1.\sin\theta + u_2.\cos\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}.\sin\theta - \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}.\cos\theta \end{cases}$$

Mais puisque :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial x_2}{\partial\theta} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial x_1}{\partial\theta} = \dfrac{\partial x_2}{\partial r} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ u_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \end{cases}$$

Soit :

$$d\psi = -u_0.dr + r.u_r.d\theta$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

8. Ecoulement plan d'un fluide isovolume avec potentiel des vitesses

Pour un écoulement plan, l'équation de la *conservation de la mase* s'écrit :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0$$

Cela implique qu'il existe une *fonction de courant* $\psi(x_1,x_2,t)$ telle que :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ u_2 = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases}$$

Le caractère *irrotationnel de l'écoulement* se traduit par l'équation :

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=0$$

Ceci entraine l'existence d'une *fonction potentiel* $\Phi(x_1,x_2,t)$ telle que :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ u_2 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} \end{cases}$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

En remplaçant u_1 et u_2 par leurs expressions respectives en fonction de Φ, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = 0$$

A partir du caractère *irrotationnel de du mouvement* se traduisant par $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$ on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = 0$$

Remarque :

Si la *condition d'irrotationnalité* n'est pas satisfaite (écoulement rotationnel), *il n'existe pas alors de potentiel des vitesses*, mais il existera toujours *une fonction de courant* ψ, telle que :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -2.\omega$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Compte tenu des expressions de u_1 et u_2 en fonction de Φ , puis de ψ, déjà exposées auparavant et qui sont ré-écrites ci-dessous, on obtient :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ u_2 = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ u_2 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} \end{cases}$$

On peut obtenir alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ u_2 = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} \end{cases}$$

Soit, finalement les relations entre de Φ , puis de ψ, qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

9. Ecoulement plan stationnaire d'un fluide compressible

Dans le cas où le fluide *n'est pas isovolume* (compressible), l'équation de conservation de la masse s'écrit pour un *écoulement stationnaire* sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho.u_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\rho.u_2)}{\partial x_2}=0$$

Cette relation permet de définir la fonction $\psi' = f(x_1,x_2)$, telle que :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi'}{\partial x_1}=-\rho.u_2\\[2mm]\dfrac{\partial\psi'}{\partial x_2}=\rho.u_1\end{cases}$$

En faisant le dérivées partielles des expressions précédentes respectivement par rapport à x_2 ensuite par rapport à x_1, on obtient :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial\psi'}{\partial x_1}\right)=\dfrac{\partial^2\psi'}{\partial x_2.\partial x_1}=\dfrac{\partial^2(-\rho.u_2)}{\partial x_2.\partial x_1}\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial\psi'}{\partial x_2}\right)=\dfrac{\partial^2\psi'}{\partial x_1.\partial x_2}=\dfrac{\partial^2(\rho.u_1)}{\partial x_1.\partial x_2}\end{cases}$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Pour que, dans le cas du *fluide non isovolume*, la *fonction de courant* ψ' soit mesurée avec les mêmes unités que dans le fluide isovolume (et aussi avec les mêmes unités que le potentiel des vitesses, s'il existe), on préfère définir une fonction $\psi(x_1,x_2)$, telle que :

Cette relation permet de définir la fonction $\psi' = f(x_1,x_2)$, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi'}{\partial x_1} = -\dfrac{\rho}{\rho_0}.u_2 \\ \dfrac{\partial \psi'}{\partial x_2} = \dfrac{\rho}{\rho_0}.u_1 \end{cases}$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide dans des conditions bien définies de température et de pression.

Compte tenu de la relation suivante prevenant de $d\psi = 0$:

$$d\psi = u_1\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)_{x_2} + u_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)_{x_1} = 0$$

On peut écrire alors :

$$\psi(x_1, x_2) = C^{te}$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Le calcul du débit volumique élémentaire par unité de hauteur *dQ* entre deux lignes de courant de côtes ψ_1 et $\psi_1+d\psi$ donne :

$$dQ_v = u_2.dx_1 - u_1.dx_2 d\psi = -\frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}.x_2\right) = -\frac{\rho_0}{\rho}.d\psi$$

Si la distance des lignes de courant de cotes ψ_1 et ψ_2 est finie, la valeur de ρ varie le long de la courbe (C) qui joint les 2 points M et N (voir figure ci-contre). Dans ce cas, le débit massique par unité de longueur (ou de hauteur) *Q* à travers la courbe (C) est :

$$Q = \int_C dQ = \int_C \rho.dQ_v = \int_C \rho.\vec{U}.\vec{n}.d\ell = -\int_C \rho_0.d\psi$$

$$= -\rho_0.(\psi_2 - \psi_1) = \rho_0.(\psi_1 - \psi_2) = \psi_1' - \psi_2'$$

Ainsi, pour un *fluide à masse volumique variable, la cotation des lignes de courant ψ' ne permet que le calcul du débit massique, et non pas du débit volumique.*

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Dans le cas d'un *écoulement avec potentiel des vitesses*, les *lignes de courant* et les *lignes équipotentielles* forment *toujours* deux familles de courbes *orthogonales*.

Considérons une maille élémentaire constituée par deux lignes de courant voisines ψ_1 et $\psi_1+d\psi$ et deux équipontentielles voisines Φ_1 et $\Phi_1+d\Phi$.

La relation $$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

donne, en remplaçant les axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ respectivement par $\overrightarrow{P\tau}$ et $\overrightarrow{Pn}$, déjà définis ci-contre :

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

ou bien

$$\rho . u_1 = \rho . \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \rho_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

Si le *fluide est isovolume*, on retrouve la relation : $u_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \dfrac{\partial \psi}{\partial n}$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

10. Ecoulement de révolution

Par *analogie avec ce qui a été fait pour l'écoulement plan*, nous définissons la *fonction de courant dans un écoulement de révolution à partir* de la loi de *conservation de la masse* dans un tel écoulement, exprimée en *coordonnées cylindriques*.

La divergence du vecteur $\rho.\vec{U}$ s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$div\left(\rho.\vec{U}\right)=\frac{1}{r}.\left(\frac{\partial\left(\rho.r.u_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial\left(\rho.u_\theta\right)}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial\left(\rho.u_3\right)}{\partial x_3}$$

Par suite, l'équation de *conservation de la masse*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\rho.\vec{U}\right)=0$$

s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}.\left(\frac{\partial\left(\rho.r.u_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial\left(\rho.u_\theta\right)}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial\left(\rho.u_3\right)}{\partial x_3}=0$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

En *écoulement stationnaire de révolution* où, par définition, les dérivées par rapport à θ sont nulles, l'équation de de *conservation de la masse* en *coordonnées cylindriques*, se réduit à :

$$\frac{\partial(\rho.r.u_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho.r.u_3)}{\partial x_3}=0$$

Dans cette équation, la *vitesse circonférentielle u_θ* n'y figure pas, et le *mouvement dans un plan méridien est indépendant du mouvement circonférntiel*. Ainsi, l'équation de de *conservation de la masse* dans un *écoulement stationnaire méridien (u_θ = 0)* est donc celle qui est ci-dessus.

Cette équation de conservation permet de définir une fonction de courant *$\psi(r,x_3)$*, telle que :

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{\rho.r}{\rho_0.r_0}.u_3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_3}=\frac{\rho.r}{\rho_0.r_0}.u_r$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\rho . r}{\rho_0 . r_0} . u_3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_3} = \frac{\rho . r}{\rho_0 . r_0} . u_r$$

Les constantes ρ_0 et r_0 sont introduites uniquement pour des *raisons d'homogénéïté*. Dans le cas d'un *fluide isovolume*, les équations précédentes se réduisent à :

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{r}{r_0} . u_3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_3} = \frac{r}{r_0} . u_r$$

Ces équations sont aussi valables pour un *écoulement instationnaire*, et la *fonction de courant $\psi(r,x_3,t)$* est alors *dépendante du temps t*.

Ainsi, l'équation $\psi(r,x_3,t)$ définit la méridienne d'une *surface de révolution* qui est une *surface de courant*. Si l'*écoulement est méridien*, cette méridienne est alors une ligne de courant.

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Les équations suivantes :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\rho . r}{\rho_0 . r_0} . u_3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{\rho . r}{\rho_0 . r_0} . u_r$$

donnent :

$$u_r . \frac{\partial \psi}{\partial r} + u_3 . \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0$$

Cette relation exprime que, *dans un plan méridien*, la *vitesse U = (u_r,x_3)*, *tangente à la ligne de courant*, est *normale au vecteur* $\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right)$, lui-même *normal à la courbe ψ = Cte*.

Si *l'écoulement méridien admet un potentiel des vitesses Φ(r,z,t)*, les *composantes de vitesse u_r* et *u_3* sont données par :

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \qquad \text{et} \qquad u_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Compte tenu des expression précédentes de *u_r* et de *u_3*, dans le cas d'*écoulement stationnaire* et d'un *fluide non isovolume*, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial r} = -\dfrac{\rho . r}{\rho_0 . r_0} . u_3 = -\dfrac{\rho . r}{\rho_0 . r_0} . \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3} = \dfrac{\rho . r}{\rho_0 . r_0} . u_r = \dfrac{\rho . r}{\rho_0 . r_0} . \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases}$$

Dans le cas d'*écoulement stationnaire ou non* et d'un *fluide isovolume*, les équations précédentes se réduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial r} = -\dfrac{r}{r_0} . \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3} = \dfrac{r}{r_0} . \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases}$$

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

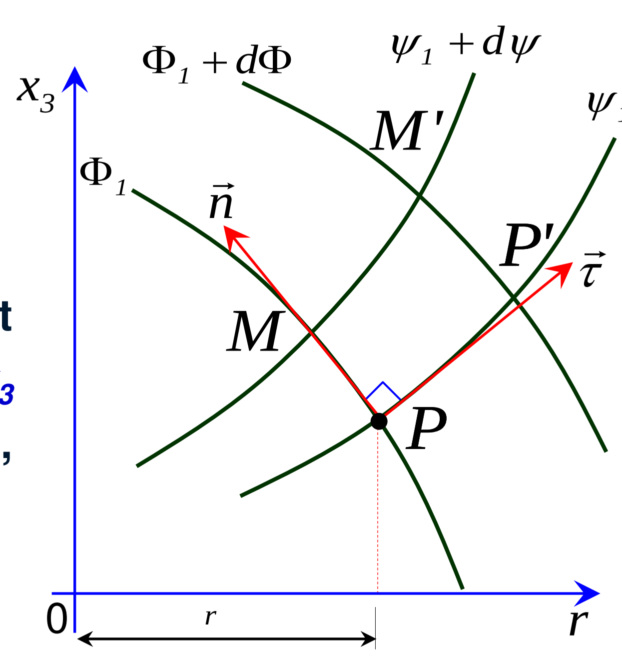
ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Compte tenu des expression précédentes de *u_r* et de *u_3*, dans le cas d'***écoulement stationnaire*** et d'un ***fluide non isovolume***, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial r} = -\dfrac{r}{r_0} \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3} = \dfrac{r}{r_0} \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases}$$

En particulier, si en un point, l'axe des *r* est tangent à l'écoulement (***axe des*** τ), et si l'***axe des*** x_3 coincide avec la ***normale*** de cette ligne (***axe des n***), on a dans le cas précédent :

$$r_0 \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) = r \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)$$



FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Dans le cas particulier d'un *écoulement avec potentiel des vitesses d'un fluide isovolume*, l'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} . \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Compte tenu de $u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ **et de** $u_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ **, l'équation précédente devient :**

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} . \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0$$

C'est le *Laplacien de la fonction Φ en coordonnées cylindriques*.

FLUIDE IDÉAL ET ISOVOLUME :

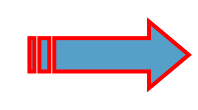
ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS

Dans le même cas d'écoulement, d'après :

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \\ u_3 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} \end{cases}$$

la condition d'irrotationnalité $\dfrac{\partial u_r}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial r} = 0$ permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = 0$$



Le premier membre n'est pas le Laplacien de la fonction ψ en coordonnées cylindriques. Le résultat est donc tout à fait différent de celui auquel conduit l'emploi des coordonnées cartésiennes dans l'étude de l'écoulement plan.

compte tenu de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial r} = -\dfrac{r}{r_0} \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3} = \dfrac{r}{r_0} \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases}$$

Chapitre 3

Représentation des écoulements plans, isovolumes et irrotationnels par des fonctions analytiques

Chapitre III

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

1. Introduction

On dit que l'*écoulement est irrotationnel* lorsque les particules fluides *ne subissent pas de rotations pures*. Autrement dit, le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ ***est nul* dans un *écoulement irrotationel*.**

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}.\vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \vec{0}$$

D'un point de vue *mathématique*, la relation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{grad}(\Phi) = \vec{0} \qquad \forall \quad \Phi$$

est toujours vraie.

On est alors *en droit* de définir un scalaire *Φ* tel que : $\vec{U} = \overrightarrow{grad}(\Phi)$

où *Φ* correspond donc à un potentiel scalaire : c'est le *potentiel des vitesses*.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Il est donc possible d'exprimer les composantes du vecteur vitesse à partir du potentiel des viteses :

$$\vec{U} = \overrightarrow{grad}(\Phi) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ u_2 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} \\ u_3 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} \end{cases}$$

L'écoulement étant incompressible, on doit alors vérifier :

$$div\left(\vec{U}\right) = \vec{0}$$

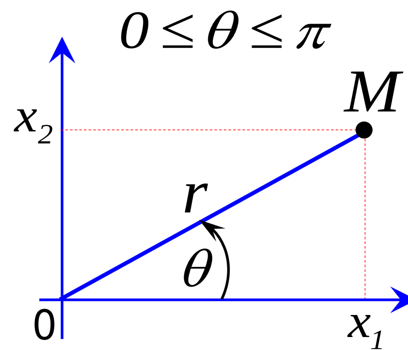
ce qui conduit à la relation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0 \qquad \textbf{ou} \qquad \Delta(\Phi) = 0$$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

2. Définition de quelques propriétés des fonctions analytiques

Une variable complexe $z = x_1 + ix_2$ peut être représentée dans le plan (x_1,x_2), par un point $M=(x_1,x_2)$. z est appelé l'affixe du point M, ou tout simplement le point z.



La distance $OM = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ **est le module de z.**

L'angle θ que fait OM avec Ox_1 est *l'argument de z*.

Donc :

$$z = x_1 + ix_2 = r.(\cos\theta + i\sin\theta).e^{i\theta}$$

avec :

$$i^2 = -1$$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Dans un domaine (D) du plan des x_1x_2, toute fonction $f(z)$ de la variable complexe z peut être écrite sous la forme :

$$f(z) = \Phi(x_1, x_2) + i\,\psi(x_1, x_2)$$

qui met en évidence la partie réelle Φ et la partie imaginaire ψ.

Ainsi, une fonction f(z) est dite analytique au un point z, si l'on peut trouver un cercle de centre z et de rayon non nul tel que, à l'intérieur de ce cercle, les fonctions $\Phi(x_1,x_2)$ et $\psi(x_1,x_2)$ soient univoques et aient des dérivées partielles continues vérifiant indentiquement les relations, dites de Cauchy-Rienmann :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

La différentielle de *f(z)* s'écrit :

$$df = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right).dx_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right).dx_2 + i\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right).dx_1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right).dx_2\right)$$

Les relations $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ **et** $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ **permettent d'écrire :**

$$df = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right).dz$$

Ainsi, *quelque soit la variable z*, on obtient la même limite :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

L'existence et la continuité des dérivées d'un ordre quelconque de *f(z)* permettent de déduire, à partir des relations ci-dessus, les équations :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = 0 \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = 0$$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

3. Potentiel complexe et vitesse complexe

Soit, au point *$M=(x_1,x_2)$*, un écoulement plan à la fois isovolume et irrotationnel. A chaque instant, les composantes *u_1* et *u_2* de la vitesse $U(x_1,x_2)$ en un point, satisfont les relations :

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

La *fonction complexe* *$f(z)$*, définie à chaque instant par l'expresion :

$$f(z) = \Phi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2)$$

est au point *z*, une fonction analytique. Nous l'appellerons potentiel complexe au point *z*.

La dérivée de *df/dz*, qui est aussi *une fonction analytique* au point *z*, est donnée par la relation :

$$w(z) = df/dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = u_1 - iu_2$$

Cette dérivée, appelée vitesse complexe **w** au point **z**, est l'imaginaire conjugué de la *fonction complexe* $\vec{U} = u_1 + iu_2$ représentant le *vecteur vitesse* au point *z*.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

a) Ecoulement uniforme

Considérons l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses : $f(z) = Uz$

On a alors : $\varphi(x,y) + i\,\Psi(x,y) = U(x + i\,y) = Ux + i\,Uy$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} \varphi(x,y) = Ux \\ \Psi(x,y) = Uy \end{cases}$

Les lignes de courant sont telles que : $\Psi(x,y) = Uy = C^{te}$

$\Rightarrow \quad y = C^{te} \ \forall x$ ce sont des droites horizontales.

Les équipotentielles sont telles que : $\varphi(x,y) = Ux = C^{te}$

$\Rightarrow \quad x = C^{te} \ \forall y$ ce sont des droites verticales.

Détermination du champ de vitesses : $\vec{v} = \begin{cases} v_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = U \\ v_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \end{cases}$

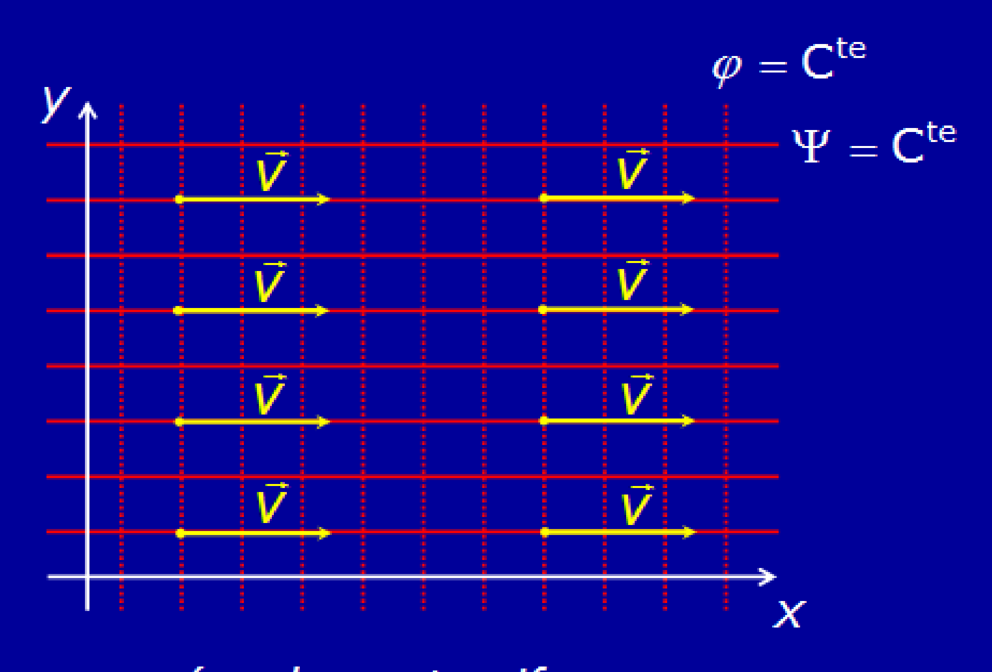
La vitesse est uniforme : $\vec{v} = U\,\vec{e}_x$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

lignes de courant : $\Psi(x,y) = Uy = C^{te} \Rightarrow y = C^{te}\ \forall x$ (droites horizontales)

équipotentielles : $\varphi(x,y) = Ux = C^{te} \Rightarrow x = C^{te}\ \forall y$ (droites verticales)

champ de vitesses : $\vec{V} = U\,\vec{e}_x$



écoulement uniforme

$f(z) = Uz$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

b) Ecoulement plan autour d'une source ou d'un puits

Considérons l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses : $f(z) = C \ln z$ où $z = x + i\,y = r\,e^{i\theta}$

et C une constante réelle.

$$\Rightarrow f(z) = C \ln\left(r\,e^{i\theta}\right) = C\left(\ln r + i\,\theta\right)$$

On peut alors en déduire la fonction de courant et le potentiel des vitesses :

$$\begin{cases} \varphi(r,\theta) = C \ln r \\ \Psi(r,\theta) = C\,\theta \end{cases}$$

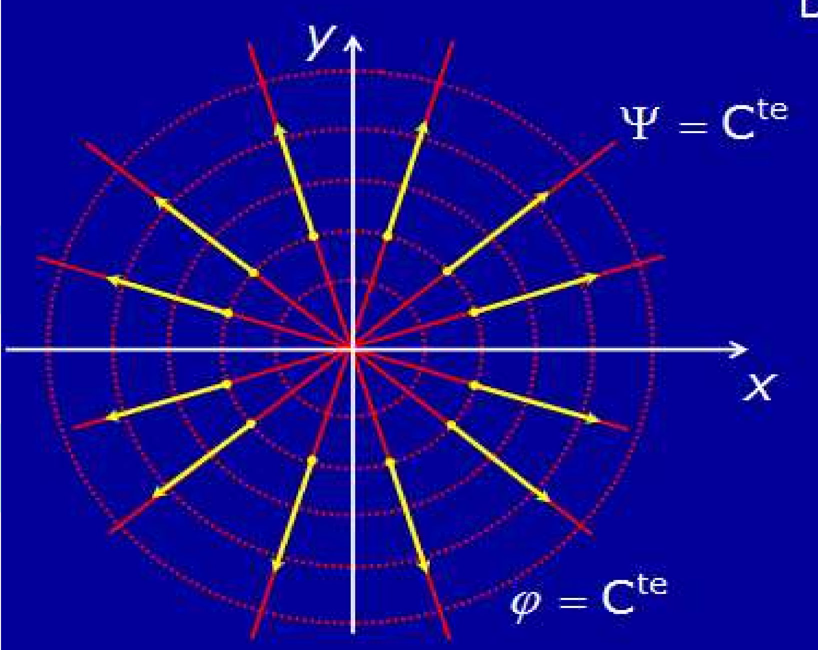
Les lignes de courant sont telles que : $\Psi(r,\theta) = C\,\theta = C^{te}$

$\Rightarrow \quad \theta = C^{te} \ \forall r$ ce sont des droites passant par l'origine.

Les équipotentielles sont telles que : $\varphi(r,\theta) = C \ln r = C^{te}$

$\Rightarrow \quad r = C^{te} \ \forall \theta$ ce sont des cercles concentriques centrés sur l'origine.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES



Détermination du champ de vitesses :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

Soit : $\vec{v} = \begin{cases} v_r = C/r \\ v_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{C}{r}\vec{e}_r$

La vitesse est donc radiale et inversement proportionnelle à la distance à l'origine.

Si C>0, alors l'écoulement est dirigé vers l'extérieur
$\Rightarrow$ écoulement *divergent* $\Rightarrow$ ***source*** à l'origine.

Si C<0, alors l'écoulement est dirigé vers l'origine
$\Rightarrow$ écoulement *convergent* $\Rightarrow$ ***puits*** à l'origine.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Signification physique de la constante C :

Calculons le débit volumique de cet écoulement radial (source ou puits) :

$$q_v = \oiint_S \vec{v}.\vec{n}\,\mathrm{d}S$$ où S est une surface fermée entourant l'origine.

L'écoulement ayant lieu dans un plan $\perp$ à l'axe z, on peut considérer comme surface d'intégration un cylindre de hauteur $\Delta z = 1$, et donc :

$$\oiint_S \ldots \mathrm{d}S = \oint_\ell \ldots \Delta z \,\mathrm{d}\ell$$ Il reste alors à intégrer sur un cercle de rayon r quelconque, centré sur l'origine.

$$q_v = \Delta z \oint_\ell \vec{v}.\vec{n}\, r\,\mathrm{d}\theta = \Delta z\, r \int_0^{2\pi} \vec{v}.\vec{n}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{v} = C/r\,\vec{e}_r \\ \vec{n} = \vec{e}_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_v = \Delta z\, r \int_0^{2\pi} \frac{C}{r}\,\mathrm{d}\theta = \Delta z\, r \frac{C}{r} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi C \Delta z$$ ($\Delta z \rightarrow 1$) *débit volumique par unité de hauteur*

$$\Rightarrow C = \frac{q_v}{2\pi}$$ et par conséquent : $$f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln z$$

$q_v > 0$: *débit de la source*

$q_v < 0$: *débit du puits*

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

c) Vortex ou tourbillon libre

Considérons l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses : $f(z) = -i\,C \ln z$ où $z = x + i\,y = r\,e^{i\theta}$

et C une constante réelle.

$$\Rightarrow f(z) = -i\,C \ln\left(r\,e^{i\theta}\right) = -i\,C\,(\ln r + i\theta) = C\theta - i\,C \ln r$$

On peut alors en déduire la fonction de courant et le potentiel des vitesses :

$$\begin{cases} \varphi(r,\theta) = C\,\theta \\ \Psi(r,\theta) = -C \ln r \end{cases}$$

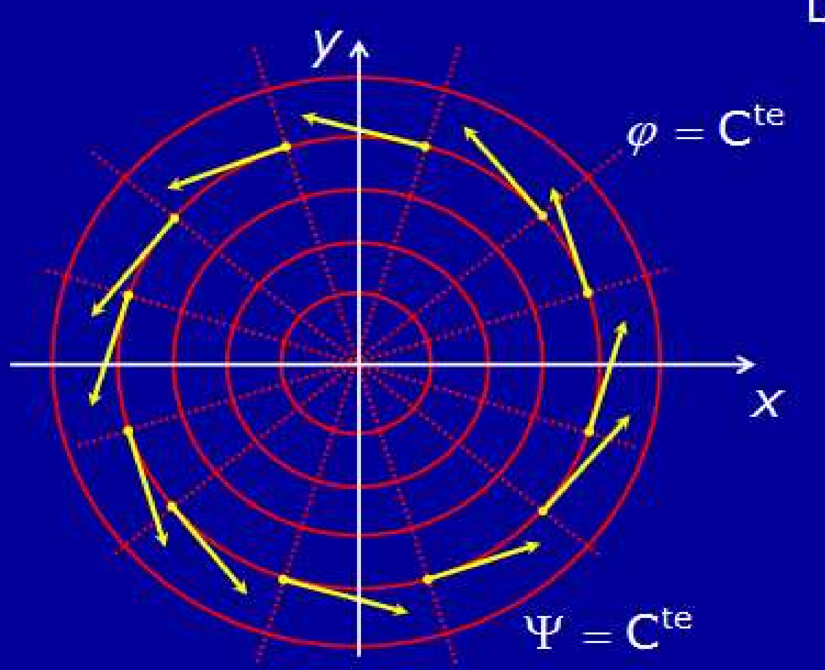
Les lignes de courant sont telles que : $\Psi(r,\theta) = -C \ln r = C^{te}$

$\Rightarrow \quad r = C^{te} \;\; \forall \theta$ ce sont des cercles concentriques centrés sur l'origine.

Les équipotentielles sont telles que : $\varphi(r,\theta) = C\,\theta = C^{te}$

$\Rightarrow \quad \theta = C^{te} \;\; \forall r$ ce sont des droites passant par l'origine.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES



Détermination du champ de vitesses :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

Soit : $\vec{v} = \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \dfrac{C}{r} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{C}{r}\vec{e}_\theta$

La vitesse est donc orthoradiale et inversement proportionnelle à la distance à l'origine.

Si **C>0**, alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le ***sens trigonométrique***.

Si **C<0**, alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le ***sens horaire***.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Signification physique de la constante C :

Calculons la « circulation » de la vitesse autour de l'origine :

$$\Gamma = \oint_{\ell} \vec{v}.\mathrm{d}\vec{\ell}$$

où $\mathrm{d}\vec{\ell}$ parcourt une ligne de courant quelconque, *i.e.* une cercle de rayon *r*.

Avec : $\vec{v} = \frac{C}{r}\vec{e}_\theta$ et $\mathrm{d}\vec{\ell} = r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta \Rightarrow \Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi C$

Donc : $C = \frac{\Gamma}{2\pi}$

et par conséquent : $f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$ où Γ est la **circulation** du vortex (tourbillon libre)

Si Γ**>0**, le vortex tourne dans le **sens trigonométrique**.
Si Γ**<0**, le vortex tourne dans le **sens horaire**.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

d) Coins et points d'arrêt

On appelle « **point d'arrêt** » un point où la vitesse est nulle.

Considérons l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses : $f(z) = C\, z^{m+1}$ où $m \geq -\frac{1}{2}$

En coordonnées cylindriques : $z = r\, e^{i\theta}$ et donc : $f(z) = C\, r^{m+1} e^{i(m+1)\theta}$

On a alors : $\begin{cases} \varphi(r,\theta) = C\, r^{m+1} \cos\left[(m+1)\theta\right] \\ \Psi(r,\theta) = C\, r^{m+1} \sin\left[(m+1)\theta\right] \end{cases}$

Le champ de vitesses s'obtenant par : $\vec{v} = \begin{cases} v_r = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$

On trouve : $\vec{v} = \begin{cases} v_r = C\,(m+1)\, r^m \cos\left[(m+1)\theta\right] \\ v_\theta = -C\,(m+1)\, r^m \sin\left[(m+1)\theta\right] \end{cases}$

On remarque que $v_r = v_\theta = 0$ pour $r = 0$ $\Rightarrow$ **l'origine est point d'arrêt.**

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

La ligne de courant passant par le point d'arrêt doit donc vérifier :

$$\Psi(r,\theta) = C^{te} = \Psi_A \quad \text{où} \quad \Psi_A = \Psi(r_A,\theta_A) = C\, r_A^{\,m+1} \sin[(m+1)\theta_A] = 0$$

L'équation de cette ligne de courant s'écrit alors :

$$C\, r^{m+1} \sin[(m+1)\theta] = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} r = 0 \;\forall \theta \\ \sin[(m+1)\theta] = 0 \;\forall r \end{cases}$$

point d'arrêt

$$\theta = \frac{n}{(m+1)}\pi \;\forall r \;\Leftarrow\; (m+1)\theta = n\pi \;\forall r$$

avec $n \in \mathbb{N}$

si $n=0$: $\theta = 0 \;\forall r \;\Rightarrow$ demi-droite Ax

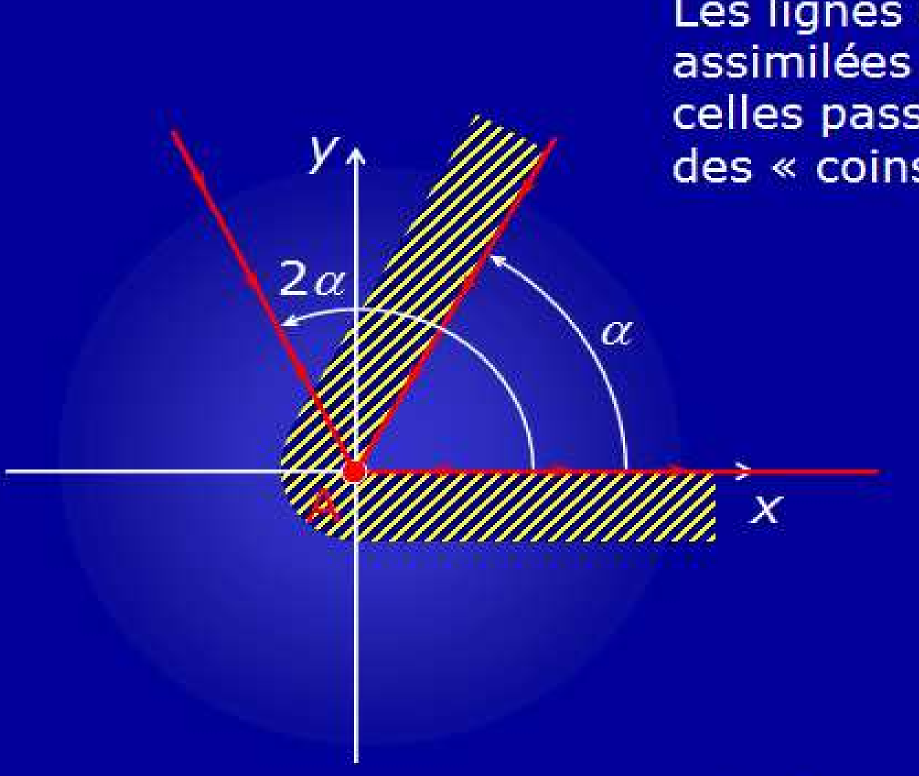
si $n=1$: $\theta = \dfrac{\pi}{m+1} = \alpha \;\forall r \;\Rightarrow$ demi-droite d'angle α avec Ax

si $n=2$: $\theta = \dfrac{2\pi}{m+1} = 2\alpha \;\forall r \;\Rightarrow$ demi-droite d'angle 2α avec Ax

...etc.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Les lignes de courant pouvant être assimilées à des barrières infranchissables, celles passant par le point d'arrêt forment des « coins » : ce sont les ***coins d'arrêt***.



Analysons maintenant l'écoulement du fluide entre ces coins d'arrêt pour quelques valeurs particulières de *m*.

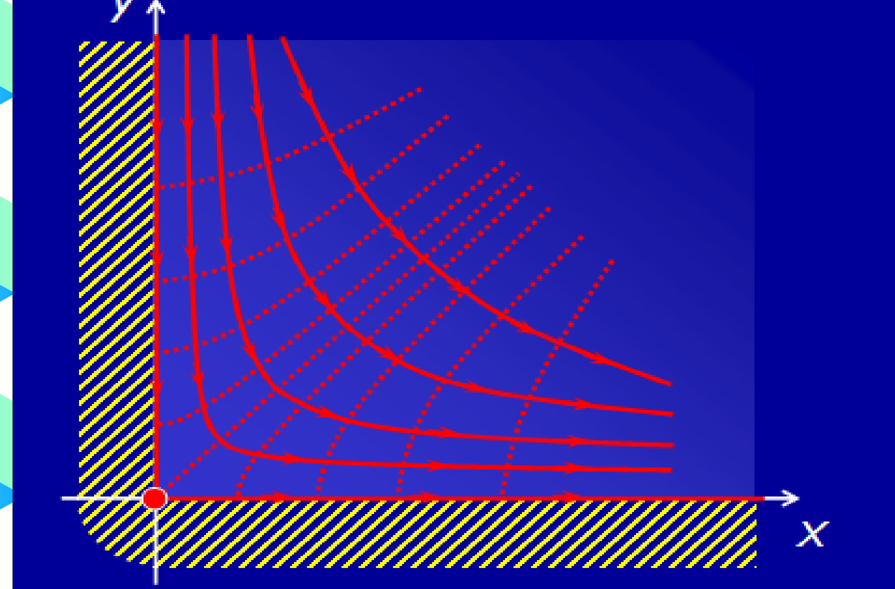
REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

$f(z) = C\,z^{m+1}$ où $m \geq -\frac{1}{2}$

- cas où **m=1**

$\Psi(r,\theta) = C\,r^2 \sin[2\theta] = C^{te}$ et $\alpha = \frac{\pi}{m+1} = \frac{\pi}{2}$ ⇒ *coin à angle droit*

$$\Rightarrow \quad \Psi(r,\theta) = 2C\,r^2 \sin\theta\cos\theta = 2C\,\underbrace{r\sin\theta}_{y}\,\underbrace{r\cos\theta}_{x} = C^{te}$$

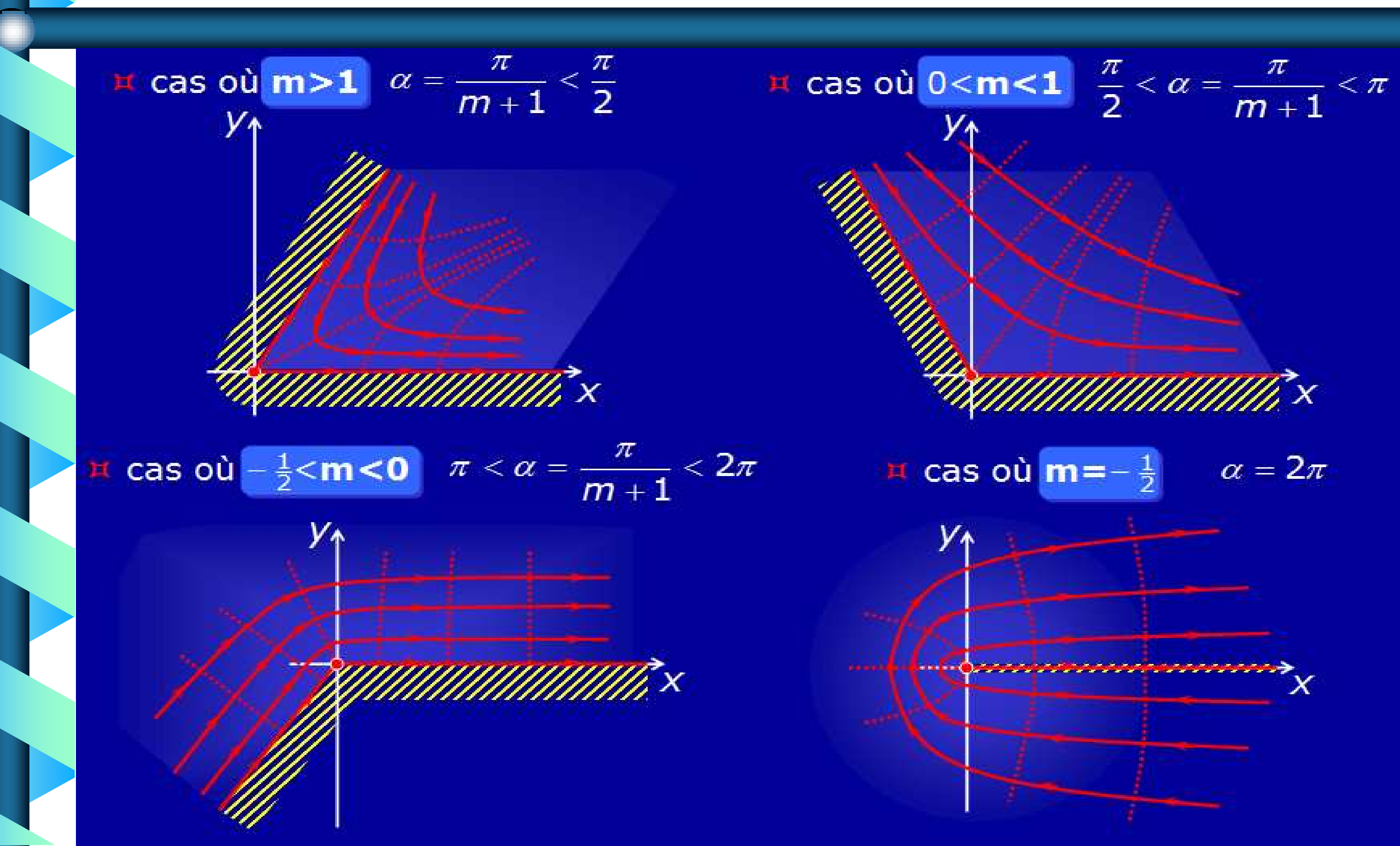


$\Psi(r,\theta) = C^{te} \quad \Leftrightarrow \quad 2C\,xy = C^{te}$

$y = \frac{C^{te}}{x}$ ⇒ *à l'intérieur de ce coin les lignes de courant sont des hyperboles*

Les équipotentielles étant en tout point ⊥ aux lignes de courant, ce sont également des hyperboles.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES



REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

e) Doublet et dipôle

On a vu que pour qu'un écoulement puisse être décrit au moyen d'une fonction de courant Ψ et d'un potentiel des vitesses φ, il faut que ces deux fonctions vérifient l'équation de *Laplace* :

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \varphi + i\,\Psi$$

Considérons alors 2 écoulements tels que :

$$(1) \quad \Delta\Psi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(z) = \varphi_1 + i\,\Psi_1$$

$$(2) \quad \Delta\Psi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2(z) = \varphi_2 + i\,\Psi_2$$

Comme l'équation de *Laplace* est linéaire :

$$\Delta(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\Delta\varphi_1 + \lambda_2\Delta\varphi_2 = 0$$

$$\Delta(\lambda_1\Psi_1 + \lambda_2\Psi_2) = \lambda_1\Delta\Psi_1 + \lambda_2\Delta\Psi_2 = 0$$

Donc, si on pose : $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ et $\Psi = \lambda_1\Psi_1 + \lambda_2\Psi_2$, alors

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow f(z) = \varphi + i\,\Psi = \lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)$$

Par conséquent, $f(z)$ décrit l'écoulement résultant de la superposition des deux écoulements f_1 et f_2.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

On peut donc superposer plusieurs écoulements élémentaires pour créer des écoulements plus évolués, et ceci par simple addition des potentiels complexes correspondants.

Association d'une source et d'un puits :

Considérons une source de débit +*q*, située en *x*=*a*, à laquelle on superpose un puits de débit -*q*, situé en *x*=-*a*.

Le potentiel complexe résultant s'écrit :

$$f(z) = \underbrace{+\frac{q}{2\pi}\ln(z-a)}_{source} \underbrace{-\frac{q}{2\pi}\ln(z+a)}_{puits}$$

Posons : $\begin{cases} z_1 = z - a = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = z + a = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases}$

D'où : $f(z) = \frac{q}{2\pi}(\ln z_1 - \ln z_2) = \frac{q}{2\pi}(\ln r_1 + i\theta_1 - \ln r_2 - i\theta_2)$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{q}{2\pi}\left[\ln\frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} \\ \Psi = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

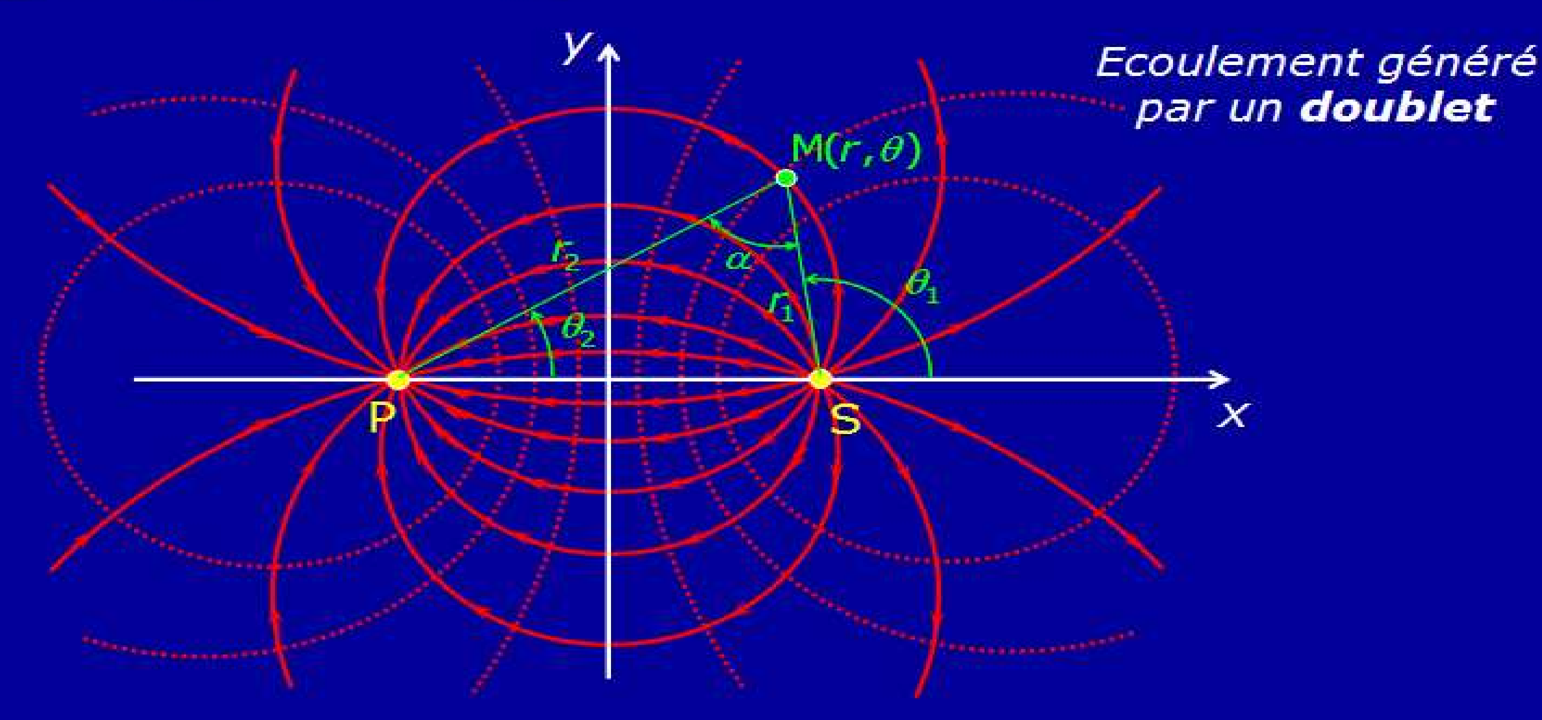
REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{q}{2\pi} \ln \dfrac{r_1}{r_2} \\ \Psi = \dfrac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Et donc, les lignes de courant sont telles que :

$$\Psi = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) = C^{te} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 - \theta_2 = C^{te} = \alpha$$

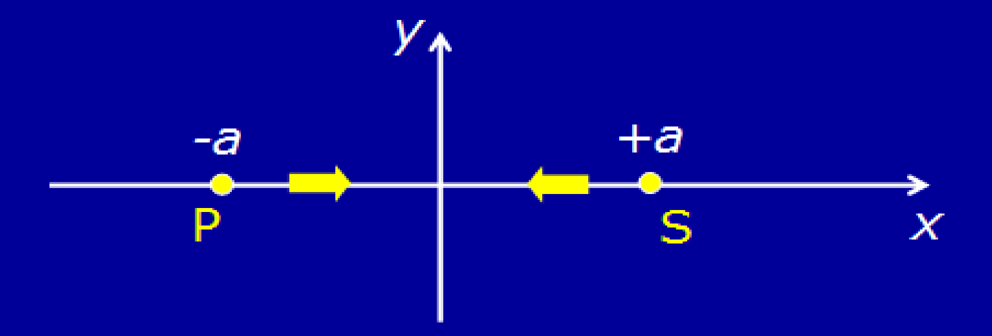
Ecoulement généré par un ***doublet***



Les lignes de courant sont des cercles passant tous par P et S.
Les équipotentielles sont également des cercles.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Faisons tendre la distance entre le puits et la source vers 0.



$$f(z) = +\frac{q}{2\pi}\ln(z-a) - \frac{q}{2\pi}\ln(z+a) = \frac{q}{2\pi}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right) = \frac{q}{2\pi}\ln\left(\frac{z(1-a/z)}{z(1+a/z)}\right)$$

$$f(z) = \frac{q}{2\pi}\ln\left(\frac{1-a/z}{1+a/z}\right) \quad \text{où} \quad \frac{1}{1+a/z} \xrightarrow[a\to 0]{} 1-a/z$$

Donc $f(z) \approx \frac{q}{2\pi}\ln\left[(1-a/z)^2\right] = \frac{q}{2\pi}2\ln(1-a/z) \approx \frac{q}{2\pi}2\left(-\frac{a}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{2aq}{z}$

Posons $2aq = p$ le moment dipolaire : $f(z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{p}{z}$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{p}{z} = -\frac{1}{2\pi}\frac{p}{r\,e^{i\theta}} = -\frac{1}{2\pi}\frac{p}{r}e^{-i\theta} = -\frac{1}{2\pi}\frac{p}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \varphi + i\,\Psi$$

D'où
$$\begin{cases} \varphi = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{p}{r}\cos\theta \\ \Psi = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{p}{r}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Psi = C^{te} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\frac{p}{r}\sin\theta = C^{te}$$

équation d'une ligne de courant

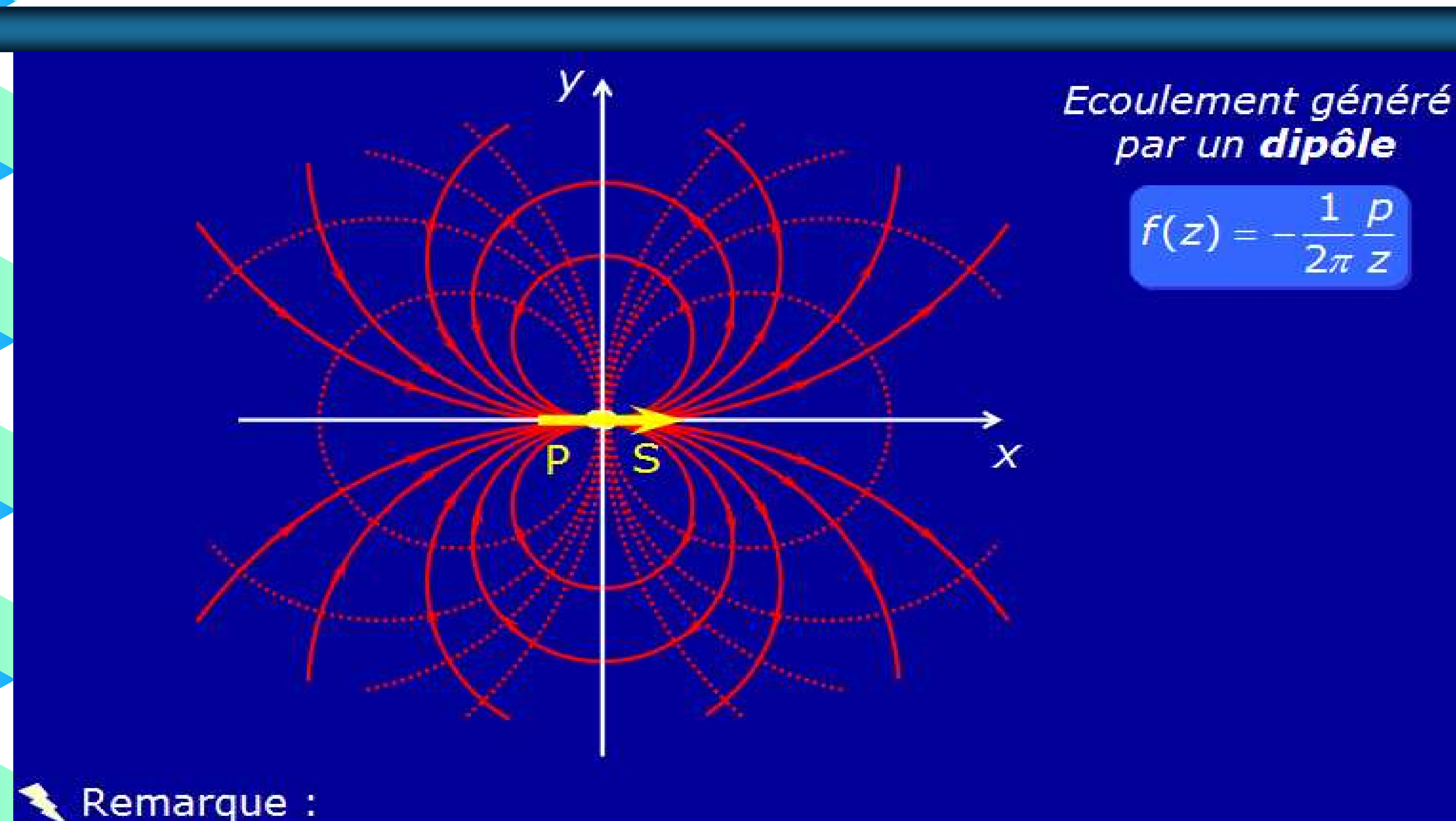
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}\sin\theta = C^{te} \quad \Rightarrow \quad r\sin\theta = C^{te}\,r^2 \quad \Rightarrow \quad y = C^{te}(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-C^{te}\,y = 0 \quad \Rightarrow x^2+y^2-Ky = 0 \quad \Rightarrow x^2+(y-K/2)^2 = (K/2)^2$$

$$\Psi = C^{te} \quad \Leftrightarrow$$ *équation d'un cercle de centre (0,K/2) et de rayon K/2*

Les lignes de courant sont des cercles tous centrés sur l'axe *y*, et passant tous par l'origine.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES



REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

4. Ecoulement autour d'un cylindre circulaire

Considérons l'écoulement résultant de la *superposition d'un écoulement uniforme*, parallèle à l'axe des x_1, dont le potentiel complexe peut s'écrire $f_1(z)=U_\infty.z$, et d'un *doublet plan à l'origine*, parallèle à l'axe des x_1 et dont le *potentiel complexe f(z)* est mis sous la forme :

$$f_2(z)=\frac{U_\infty a^2}{z}$$

Le *potentiel complexe résultant* a pour expression :

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=U_\infty\left(z+\frac{a^2}{z}\right)$$

Il peut s'écrire :

$$f(z)=\Phi+i\psi=U_\infty\left(z+\frac{a^2}{z}\right)=U_\infty\left(x_1+ix_2+\frac{a^2}{x_1+ix_2}\right)$$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

ou encore sous la forme :

$$f(z) = \Phi + i\psi = U_\infty . \left(x_1 + ix_2 + \frac{a^2 . x_1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{ia^2 . x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

$$= U_\infty . x_1 . \left(1 + \frac{a^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) + iU_\infty . x_2 . \left(1 - \frac{a^2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

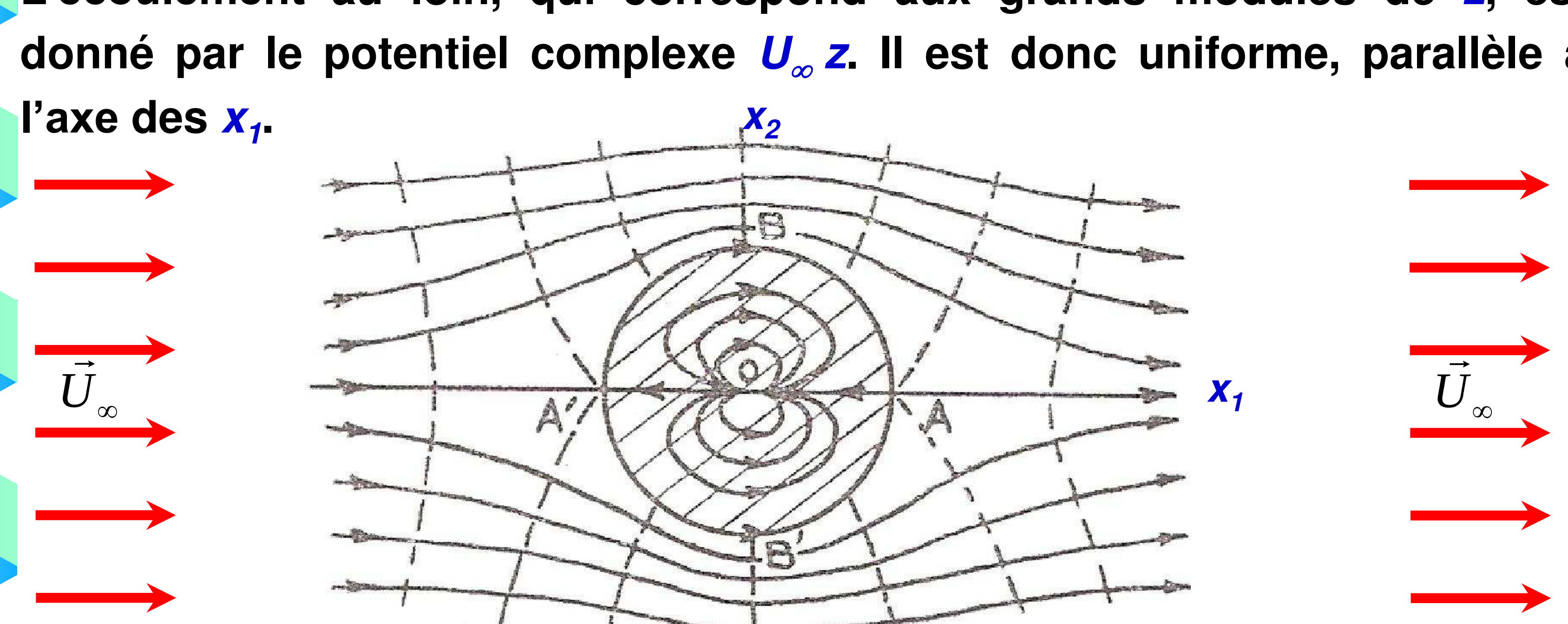
$$\begin{cases} \Phi = U_\infty . x_1 . \left(1 + \dfrac{a^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = U_\infty . r . \cos\theta . \left(1 + \dfrac{a^2}{r^2} \right) = U_\infty . \cos\theta . \left(r + \dfrac{a^2}{r} \right) \\ \psi = U_\infty . x_2 . \left(1 - \dfrac{a^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = U_\infty . r . \sin\theta . \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2} \right) = U_\infty . \sin\theta . \left(r - \dfrac{a^2}{r} \right) \end{cases}$$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

En un point z, la vitesse complexe est donnée par :

$$w(z) = \frac{df}{dz} = \frac{d}{dz}\left(U_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right)\right) = U_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = u_1 - iu_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

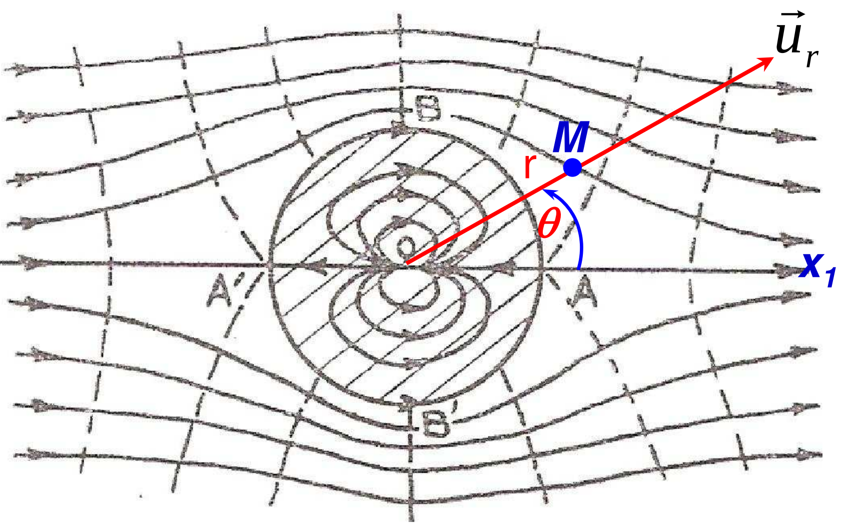
L'écoulement au loin, qui correspond aux grands modules de z, est donné par le potentiel complexe $U_\infty z$. Il est donc uniforme, parallèle à l'axe des x_1.



REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

La *ligne de courant particulière qui correspond à $\psi=0$* est constituée par l'axe des $x_1(\theta=0)$ et par le cercle de rayon a ayant son centre à l'origine. Pour $z=\pm a$, c'est-à-dire aux points d'intersection A et A' du cercle de rayon a avec l'axe des x_1, la vitesse est nulle ; ce sont deux points d'arrêt.

La relation $w(z)=df(z)/dz=U_\infty(1-a^2/z^2)$ montre que, sur l'axe des x_1, de l'infini amont au point A' et du point A à l'infini aval ($|z|>a$), la vitesse est positive, tandis qu'elle est négative sur le segment $A'A$ ($|z|<a$).

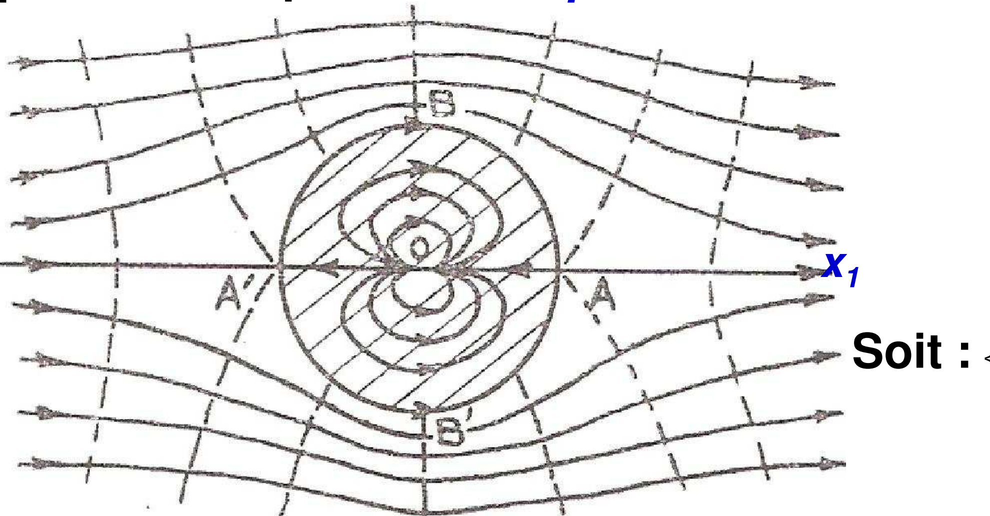


On peut donc considérer que dans le *sens positif*, la ligne de courant $\psi=0$ est constituée par l'axe des x_1, sauf la portion AA' où cette ligne de courant *se dédouble en deux-demi cercles A'BA* et *A'B'A*.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Les *lignes de courant situées à l'intérieur du cercle de rayon* *a* *se ferment sur elles mêmes*, de sorte qu'*une particule fluide intérieure reste à l'intérieur*. De même, *une particule extérieure au cerle reste toujours à l'extérieur*. On peut alors *remplacer le cercle de rayon* *a*, qui est ligne de courant, *par un obstacle solide fixe de même contour*.

La *vitesse* en un point de coordonnées cylindriques *r* et *θ*, s'obtient à partir de l'expression du *potentiel scalaire Φ*, déterminé précédemment :



$$\Phi = U_{\infty}.cos\,\theta.\left(r + \frac{a^2}{r}\right)$$

Soit :

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = U_{\infty}.cos\,\theta.\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -U_{\infty}.sin\,\theta.\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

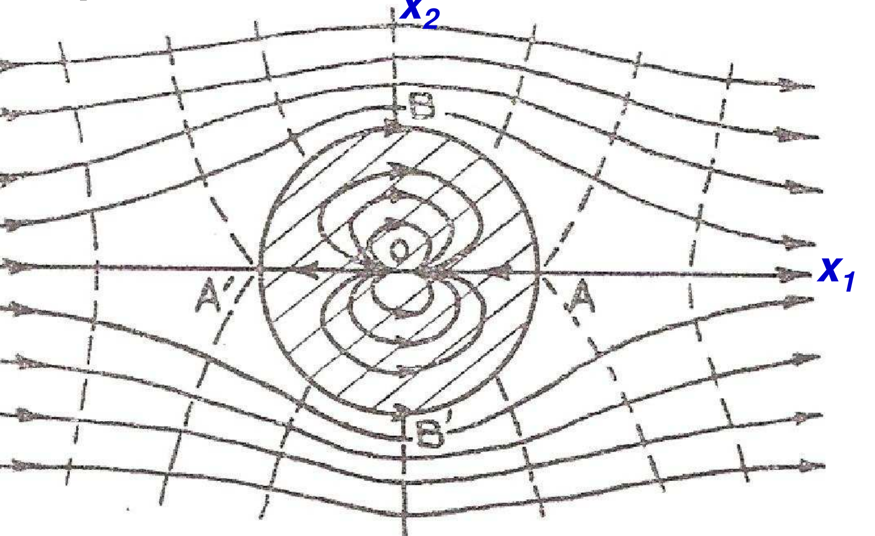
En particulier, pour un point de la circonférence (*r=a*), on a :

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = U_\infty . \cos\theta . \left(1 - \dfrac{a^2}{a^2}\right) = 0 \\ u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -U_\infty . \sin\theta . \left(1 + \dfrac{a^2}{a^2}\right) = -2U_\infty . \sin\theta \end{cases}$$

Ainsi, la *vitesse U* au point d'*azimut θ* a pour module :

$$U = 2U_\infty . |\sin\theta|$$

La *vitesse* est *maximale aux points B et B'* où le *cercle coupe l'axe des x₁*. Elle est alors *égale au double de la vitesse à l'infini*.



REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Si nous *superposons à l'écoulement précédent*, de *potentiel complexe* :

$$f(z) = U_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

un *vortex placé à l'origine*, et pour lequel la *circulation est* Γ, nous obtenons un *mouvement dont le potentiel complexe* est :

$$f(z) = \Phi + i\psi = U_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z)$$

De ce potentiel, on peut tirer :

$$\begin{cases} \Phi = U_\infty.\left(x_1 + \dfrac{a^2.x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) + \dfrac{\Gamma\theta}{2\pi} = U_\infty.r.\cos\theta.\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right) + \dfrac{\Gamma\theta}{2\pi} = U_\infty.\cos\theta.\left(r + \dfrac{a^2}{r}\right) + \dfrac{\Gamma\theta}{2\pi} \\ \psi = U_\infty.\left(x_2 - \dfrac{a^2.x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) - \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln(r) = U_\infty.r.\sin\theta.\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) - \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln(r) = U_\infty.\sin\theta.\left(r - \dfrac{a^2}{r}\right) - \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln(r) \end{cases}$$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Concernant les lignes de courant, le *potentiel des vitesse augmente de Γ pour un tour effectué dans le sens positif autour de l'obstacle*.

Les *lignes de courant* sont alors *symétriques autour de l'axe des x_2*, mais *non symétriques par rapport à l'axe des x_1*.

L'expression de la *vitesse complexe* :

$$w(z) = \frac{df}{dz} = U_\infty . \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi . z} = u_1 - iu_2$$

Montre que cette vitesse s'annule pour :

$$z^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi U_\infty} . z - a^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est : $-\frac{\Gamma^2}{4.\pi^2 . U_\infty^2} + 4.a^2$

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Trois cas peuvent se présenter :

a) Premier cas : $\dfrac{\Gamma}{U_\infty .a} < 4.\pi$

Il existe deux points A et A' de la vitesse nulle, définis par :

$$z_1 = x_1 + ix_2 = \frac{i\Gamma}{4\pi U_\infty} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16.\pi^2 U_\infty^2}}$$

Soit : $\begin{cases} x_{a1} = +\sqrt{a^2 - \dfrac{\Gamma^2}{16.\pi^2 U_\infty^2}} \\ x_{a2} = \dfrac{\Gamma}{4\pi U_\infty} \end{cases}$ **et** $\begin{cases} x_{b1} = -\sqrt{a^2 - \dfrac{\Gamma^2}{16.\pi^2 U_\infty^2}} \\ x_{b2} = \dfrac{\Gamma}{4\pi U_\infty} \end{cases}$

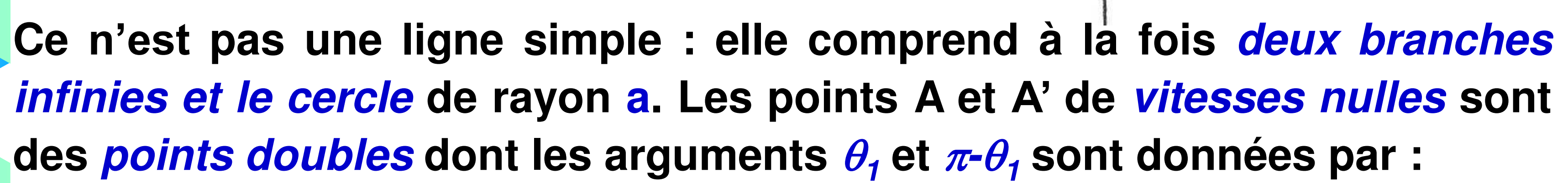
REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Ces deux points ont une ordonnée commune *$\Gamma/(4\pi U_\infty)$* et sont sur le cercle, (*$x_1^2 + x_2^2 = a^2$*).

La ligne de courant qui passe par les deux points A et A' est :

$$\psi = \psi_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi} ln(a)$$

Cette ligne de courant joue le même rôle que celui de ψ=0 dans le cas circulaire traité précédemment.



Ce n'est pas une ligne simple : elle comprend à la fois *deux branches infinies et le cercle* de rayon a. Les points A et A' de *vitesses nulles* sont des *points doubles* dont les arguments θ_1 et $\pi-\theta_1$ sont données par :

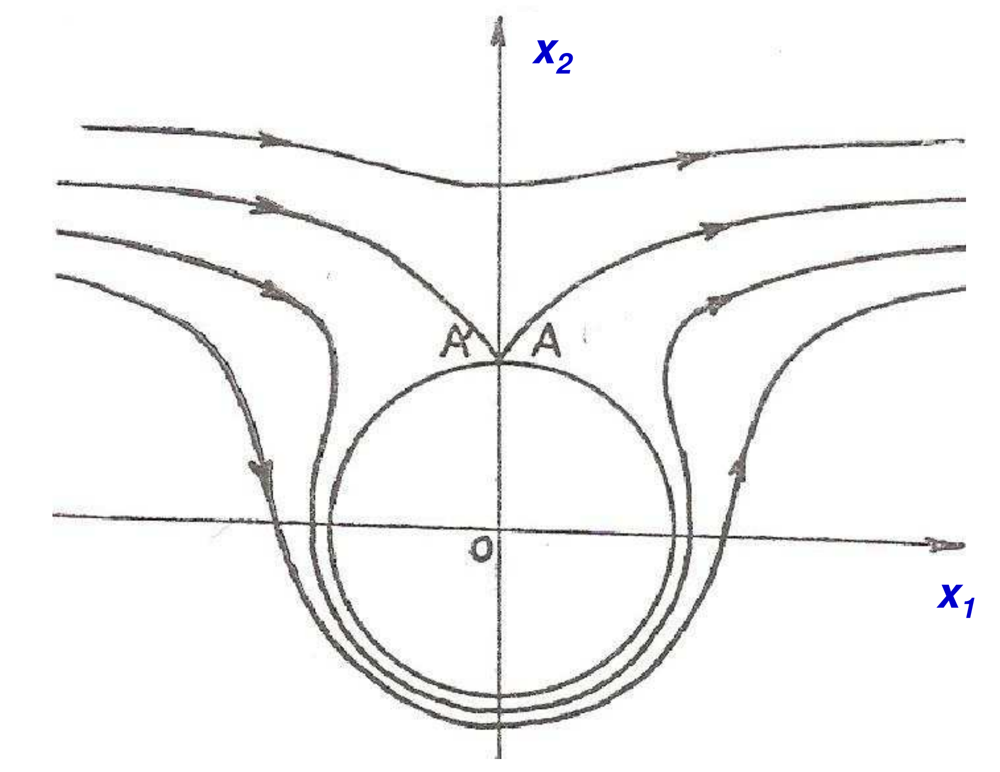
$$\sin\theta_1 = \frac{x_2}{a} = \frac{\Gamma}{4.\pi.U_\infty.a}$$

Cette expression montre la correspondance entre la valeur de la circulation autour du cylindre et la position des points d'arrêt A et A'.

REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

b) Deuxième cas : $\dfrac{\Gamma}{U_{\infty}.a} = 4.\pi$

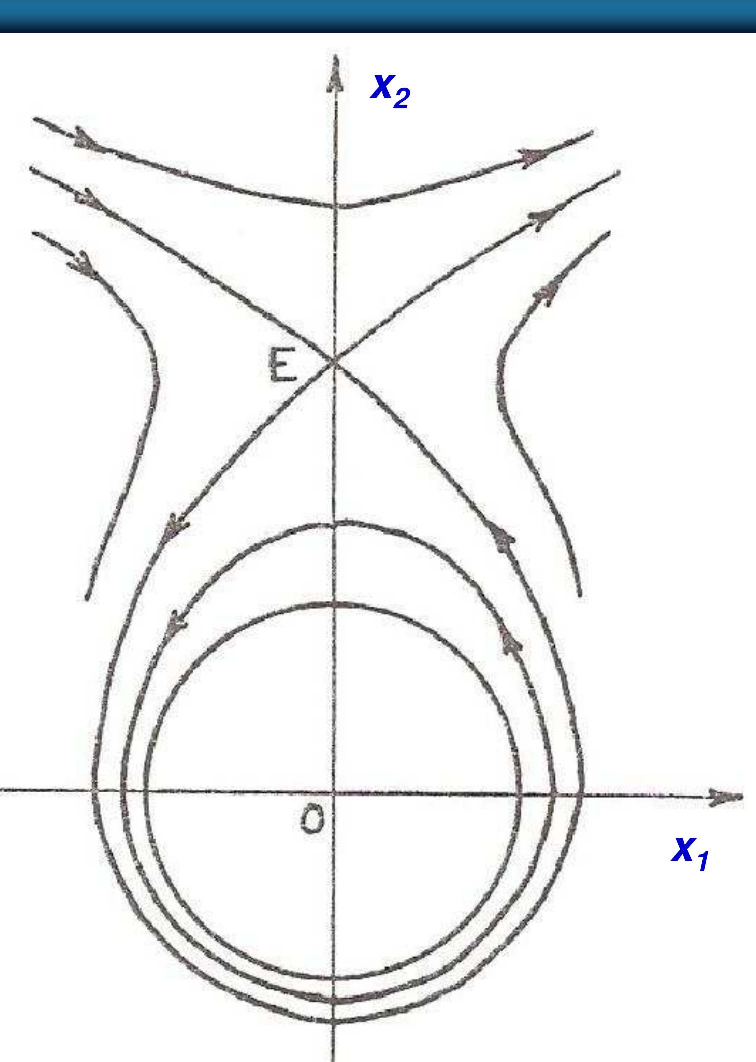
Les deux points A et A' *de vitesse nulle*, *viennent se confondre* sur l'axe des x_2.



REPRÉSENTATION DES ÉCOULEMENTS PLANS, ISOVOMES ET IRROTATIONNELS PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES

c) Troisième cas : $\dfrac{\Gamma}{U_\infty . a} > 4.\pi$

Les deux points *de vitesse nulle*, sont sur l'axe des x_2. L'*un des points est à l'intérieur du cercle,* hors de l'écoulement que nous considérons. L'autre, E, *extérieur au cercle*, appartient à une ligne de courant qui présente une *boucle à l'intérieur de laquelle les lignes de courant sont fermées* et *entourent l'obstacle*. La boucle *limite* alors une « *atmosphère* » fluide *autour de l'obstacle*.



Chapitre 4

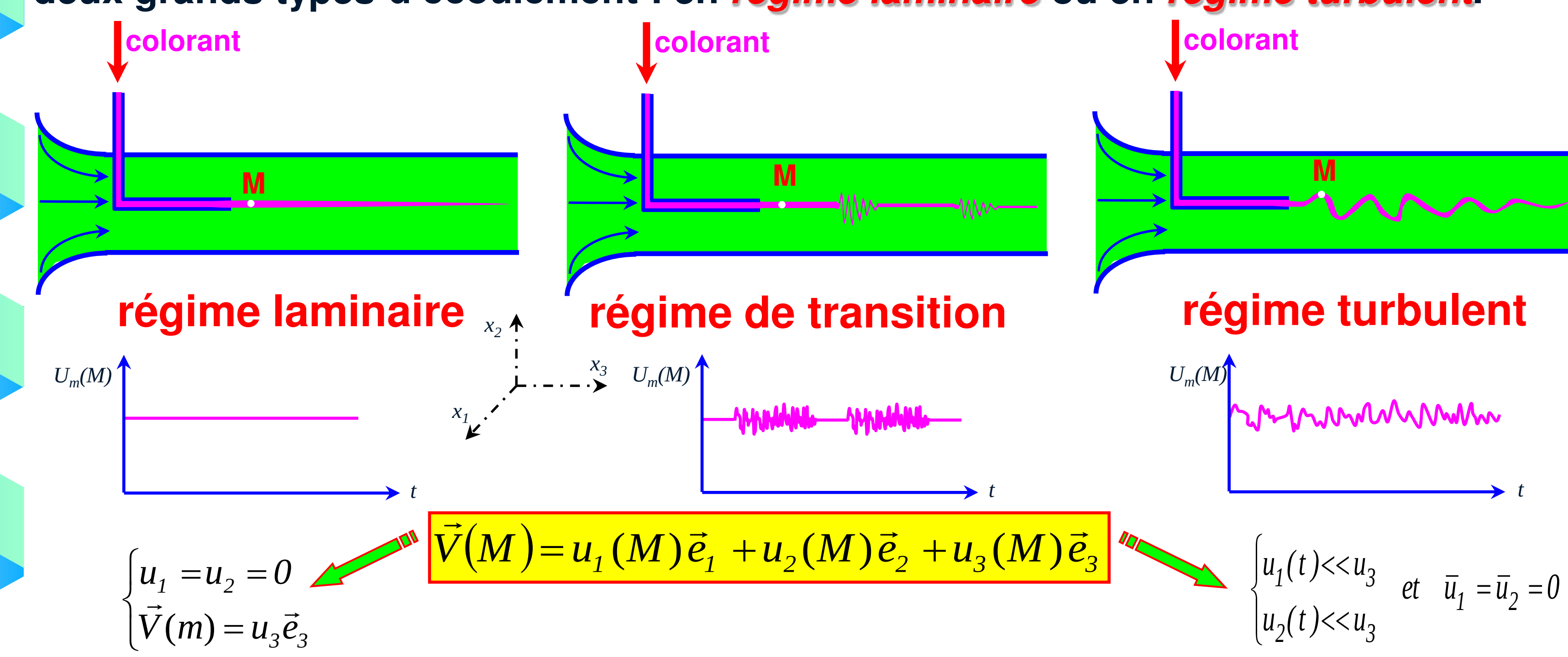
Dynamique des fluides visqueux : Pertes de charge

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

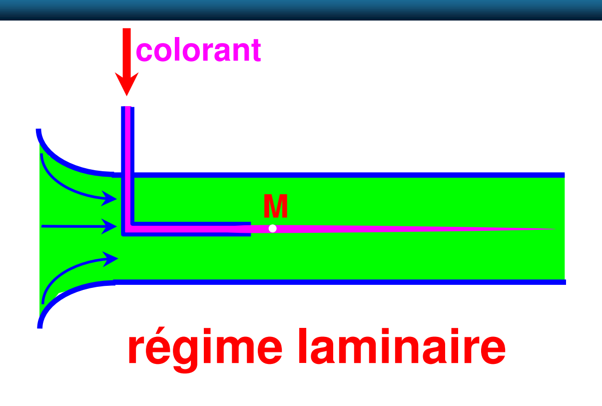
1. Notions générales

Étudier l'écoulement d'un fluide réel revient à résoudre l'équation de ***Navier-Stokes***.

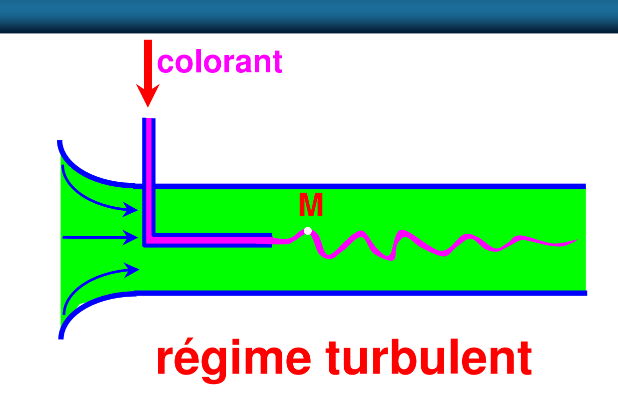
En pratique, cette équation aux dérivées partielles, ne peut se résoudre analytiquement que si on poses des ***hypothèses simplificatrices***, en distinguant deux grands types d'écoulement : en ***régime laminaire*** ou en ***régime turbulent***.



DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE



régime laminaire



régime turbulent

En ***régime laminaire***, on pourra ***généraliser l'équation de Bernoulli*** en introduisant la notion de pertes de charge dues à la viscosité du fluide en écoulement.

En ***régime turbulent***, on utilisera des ***relations empiriques*** généralement obtenues à partir de l'expérience.

La transition d'un régime d'écoulement à un autre est caractérisée par le seul paramètre adimensionnel représentant le ***nombre de Reynolds*** et noté Re. Celui-ci est défini par :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu}$$

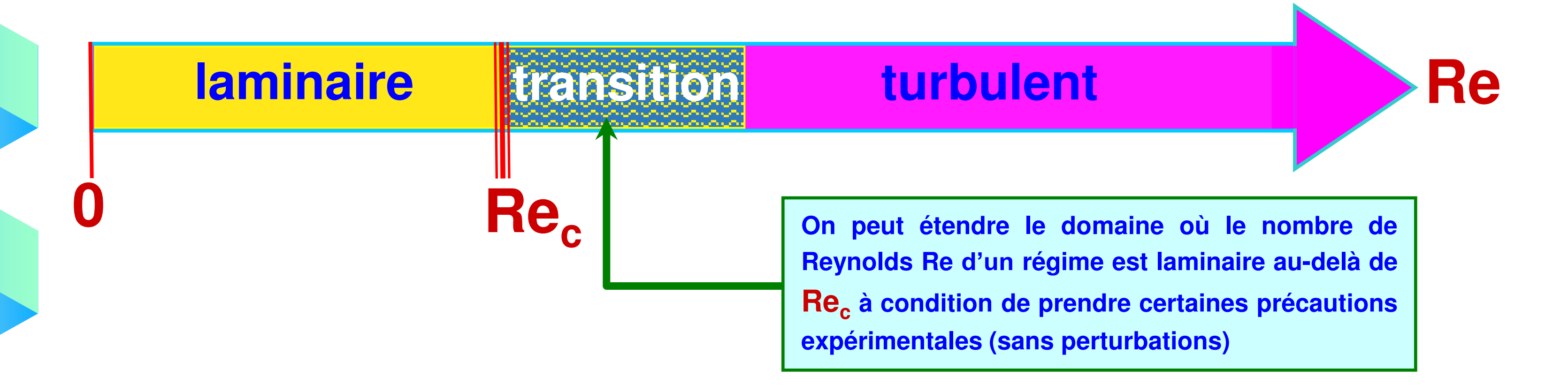
où :

- ρ : masse volumique du fluide en écoulement (en kg/m^3)
- μ : viscosité dynamique du fluide en écoulement (en Pa.s)
- ν : viscosité cinématique du fluide en écoulement (en m^2/s)
- V : vitesse débitante de l'écoulement (en m/s)
- D : diamètre équivalent de la conduite (en m): diamètre hydraulique

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

La transition d'un régime laminaire à un régime turbulent s'observe pour :

$Re = Re_c \approx 2000$ (nombre de Reynolds critique)



- ✓ *Quelles que soient les perturbations subies par le système (dispositif expérimental), le régime reste laminaire si $Re \leq 2000$.*
- ✓ *Pour $2000 \leq Re \leq 4000\text{-}5000$, le régime est dit de transition.*
- ✓ *Le régime turbulent est atteint à partir de $Re \geq 4000\text{-}5000$.*

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

2. Écoulement laminaire – Pertes de charge régulières

Pour un fluide newtonien incompressible, l'équation de *Navier-Stokes* s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu\, \Delta\vec{V} + \rho\, \vec{g}$$

Si l'écoulement est permanent (stationnaire), on a :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{0} + \left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{V} = \overbrace{\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{V}}^{f_1(z)} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(V^2\right) - \vec{V} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{\nabla}\right)$$

Soit :

$$\frac{1}{2}\rho\, \vec{\nabla}\left(V^2\right) - \rho\, \vec{V} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{\nabla}\right) = -\vec{\nabla} p + \mu\, \Delta\vec{V} + \rho\, \vec{g}$$

ou bien :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) - \rho\, \vec{V} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{\nabla}\right) = -\vec{\nabla} p + \mu\, \Delta\vec{V} - \vec{\nabla}\left(\rho\, g\, z\right)$$

ou bien :

$$\vec{\nabla}\left(p + \rho\, g\, z + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \mu\, \Delta\vec{V} + \rho\, \vec{V} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{\nabla}\right)$$

ou bien :

$$\vec{\nabla}\left(p + \rho\, g\, z + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \mu\, \Delta\vec{V} + 2\rho\, \vec{V} \wedge \vec{\Omega}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

$$\vec{\nabla}\left(p+\rho\,g\,z+\frac{1}{2}\rho V^2\right)=\mu\,\Delta\vec{V}+2\rho\vec{V}\wedge\vec{\Omega}$$

Projection sur une ligne de courant :

$$\vec{\nabla}\left(p+\rho\,g\,z+\frac{1}{2}\rho V^2\right)ds\,\vec{e}_s=\left(\mu\,\Delta\vec{V}+2\rho\vec{V}\wedge\vec{\Omega}\right).ds\,\vec{e}_s$$

$$\underbrace{\left(\vec{V}\wedge\vec{\Omega}\right)}_{\perp\vec{V}}.\underbrace{\vec{e}_s}_{//\vec{V}}=0$$

$$\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\left(p+\rho\,g\,z+\frac{1}{2}\rho V^2\right)ds\,\vec{e}_s=\mu\,\Delta\vec{V}.ds\,\vec{e}_s$$

Donc, la projection sur chacun des trois axes donne :

si : $$\begin{cases}ds\,\vec{e}_s=dx_1\,\vec{e}_1+dx_2\,\vec{e}_2+dx_3\,\vec{e}_3\\ \vec{\nabla}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)\vec{e}_1+\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)\vec{e}_2+\left(\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\\ \Delta\vec{V}=\Delta u_1\,\vec{e}_1+\Delta u_2\,\vec{e}_2+\Delta u_3\,\vec{e}_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(p+\rho\,g\,z+\dfrac{1}{2}\rho V^2\right)dx_1=\mu\,\Delta u_1\,dx_1\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(p+\rho\,g\,z+\dfrac{1}{2}\rho V^2\right)dx_2=\mu\,\Delta u_2\,dx_2\\ \dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(p+\rho\,g\,z+\dfrac{1}{2}\rho V^2\right)dx_3=\mu\,\Delta u_3\,dx_3\end{cases}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

D'où l'expression finale :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(p+\rho\, g\, z+\dfrac{1}{2}\rho V^2\right)=\mu\,\Delta u_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(p+\rho\, g\, z+\dfrac{1}{2}\rho V^2\right)=\mu\,\Delta u_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(p+\rho\, g\, z+\dfrac{1}{2}\rho V^2\right)=\mu\,\Delta u_3 \end{cases}$$

Pour un écoulement laminaire unidirectionnel s'effectuant le long de l'axe x_1, on a:

$$\vec{V}\begin{cases} u_1=V \\ u_2=0 \\ u_3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{V}=V\,\vec{e}_1$$

et si on pose : $p+\rho\, g\, z+\dfrac{1}{2}\rho V^2=p_t$

Pression totale (charge)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p_t}{\partial x_1}=\mu\,\Delta u_1 \\ \dfrac{\partial p_t}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial p_t}{\partial x_3}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_t(x_1,x_2,x_3)=p_t(x_1) \\ \dfrac{dp_t}{dx_1}=\mu\,\Delta u_1=\mu\,\Delta V=\mu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right) \end{cases}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

D'après l'équation de continuité, on a:

$$\vec{\nabla}\vec{V}=0 \iff \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0 \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1}=0 \iff \frac{\partial V}{\partial x_1}=0 \iff \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}=0$$

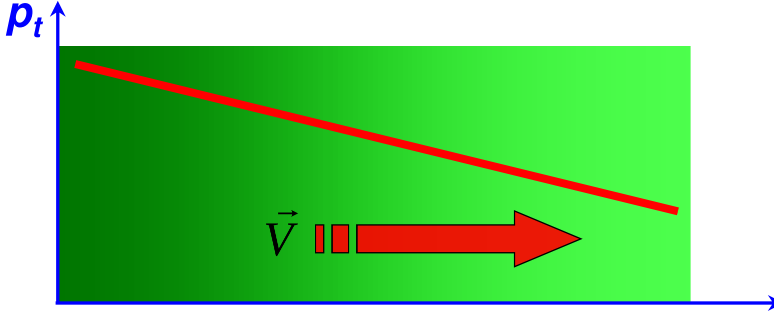
(avec $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \to 0$ et $\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \to 0$)

D'où :

$$\frac{dp_t}{dx_1}=\mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)=Cste \quad \forall \quad (x_1, x_2, x_3)$$

Fonction de x_1 — *Fonction de x_2 et de x_3*

On en déduit alors que la charge varie linéairement avec la distance parcourue par le fluide.



$$\frac{dp_t}{dx_1}=Cste<0$$

La charge diminue linéairement avec la progression de l'écoulement de fluide.

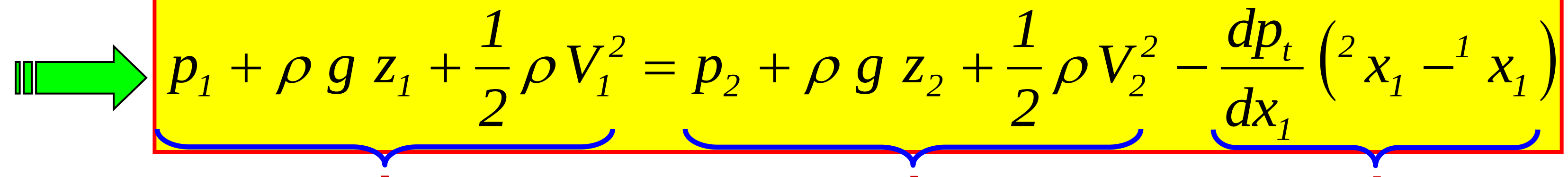
DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

p_t, p_{t1}, p_{t2}, Δp_t, ${}^1x_1$, ${}^2x_1$, x_1

$$p_{t_1} = p_{t_2} + \Delta p_t \Rightarrow \frac{dp_t}{dx_1} = \frac{p_{t_2} - p_{t_1}}{{}^2x_1 - {}^1x_1} = -\frac{\Delta p_t}{{}^2x_1 - {}^1x_1}$$

$$\Delta p_t = -\frac{dp_t}{dx_1}\left({}^2x_1 - {}^1x_1\right) > 0$$

$$p_{t_1} = p_{t_2} - \frac{dp_t}{dx_1}\left({}^2x_1 - {}^1x_1\right)$$



$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 - \frac{dp_t}{dx_1}\left({}^2x_1 - {}^1x_1\right)$$

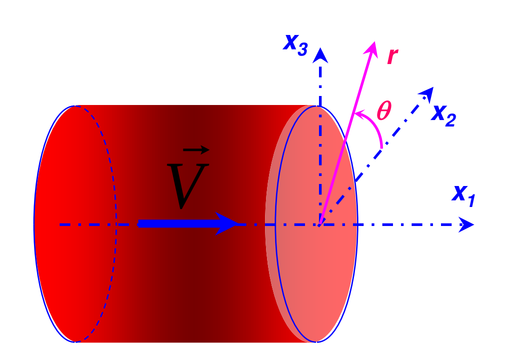
Pression totale en (1) — Pression totale en (2) — perte de charge régulière : $\Delta p_t > 0$

*Il ne reste qu'à caractériser le **gradient de pression totale** (dp_t / dx_1).*

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

3. Écoulement de Poiseuille

Soit une conduite cylindrique, de rayon R, disposée horizontalement, et dans laquelle s'écoule un fluide isovolume (incompressible) en régime laminaire :



$$\vec{V} = V\,\vec{e}_1 \;\Rightarrow\; V_r = V_\theta = 0$$

L'équation de Navier - Stokes se réduit à :

$$\frac{dp_t}{dx_1} = \mu\,\Delta V$$

D'autre part, l'équation de continuité s'écrit :

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$$

(avec $\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \to 0$ et $\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \to 0$)

La symétrie de révolution de la conduite impose que :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \;\Longrightarrow\; V(x_1, r, \theta) = V(r)$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

D'où le Laplacien s'exprime sous la forme :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

0 0

D'où :

$$\frac{dp_t}{dx_1} = \mu\,\Delta V = \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = Cte = A$$

fonction de x_1 — fonction de r

Par une simple intégration, on obtient le *profil de vitesse* $V(r) = u_1(r)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{A}{\mu} \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = \frac{A}{\mu}r \Rightarrow r\frac{dV}{dr} = \frac{A}{\mu}\frac{r^2}{2} + B \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{A}{\mu}\frac{r}{2} + \frac{B}{r}$$

$$V(r) = \frac{A}{\mu}\frac{r^2}{4} + B\ \ln(r) + C$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Détermination des constantes *B* et *C* grâce aux *conditions aux limites* :

$$\begin{cases} r = R \;\Rightarrow\; V(r=R) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{A}{\mu}\dfrac{R^2}{4} + B\ \ln(R) + C = 0 \\ r = 0 \;\Rightarrow\; V(r=0) = Cte\ (finie) \;\Rightarrow\; B\ \ln(0) + C = Cste \;\Rightarrow\; B = 0 \end{cases}$$

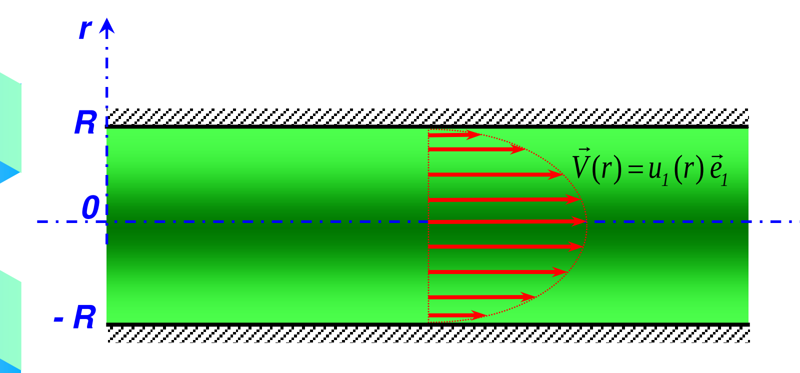
→ **adhérence**

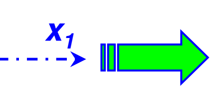
D'où :

$$C = -\frac{A}{\mu}\frac{R^2}{4} \;\Rightarrow\; \boxed{V(r) = -\frac{A}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)}$$



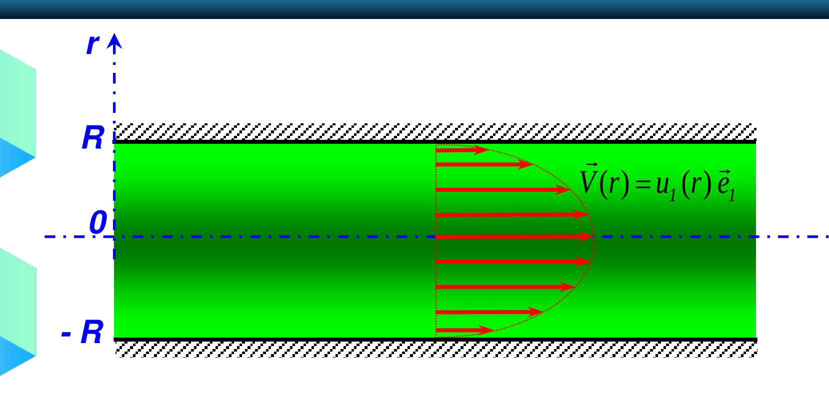
profil de vitesse parabolique





Pour avoir *V(r) > 0* quel que soit *r*, il faut que *A < 0*

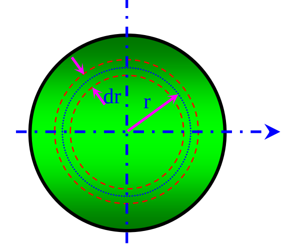
DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE



$$V(r) = -\frac{A}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp_t}{dx_1}\left(R^2 - r^2\right)$$

Débit volumique Q_v :

$$dQ_v = V(r)\,dS = 2\pi\,V(r)\,r.dr \quad \Rightarrow \quad Q_v = \int_{r=0}^{r=R} 2\pi\,V(r)\,r.dr = -\frac{2\pi}{4\mu}\left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)\int_{r=0}^{r=R}\left(R^2 - r^2\right) r\,dr$$



$$\Rightarrow \quad Q_v = -\frac{\pi}{2\mu}\left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = -\frac{\pi}{8\mu}\left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)R^4$$

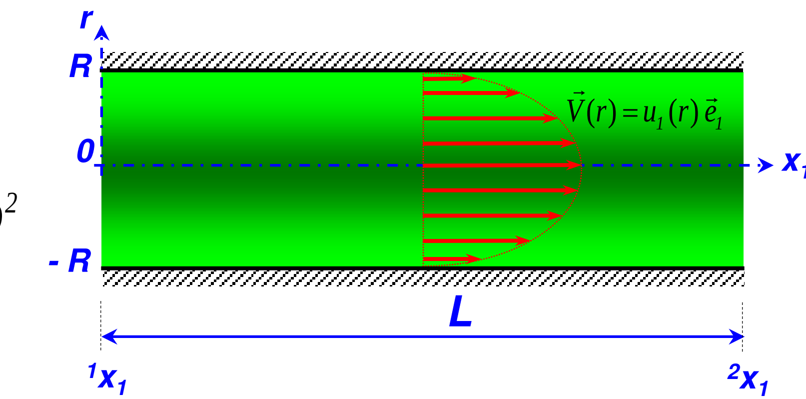
Pour $R = \dfrac{D}{2}$ $\Rightarrow$

$$Q_v = -\frac{\pi}{128\mu}\left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)D^4$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Vitesse moyenne de l'écoulement V_m :

$$V_m = \frac{Q_v}{S} = \frac{-\frac{\pi}{128\,\mu}\left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)D^4}{\pi\frac{D^2}{4}} = -\frac{1}{32\,\mu}\left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)D^2$$



Pour une conduite de longueur L, la perte de charge totale Δp_t est donnée par :

$$\Delta p_t = p_{t_1} - p_{t_2} = \int_{{}^2x_1}^{{}^1x_1}\left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)dx_1 = \left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)\int_{{}^2x_1}^{{}^1x_1} dx_1 = \left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)\underbrace{\left({}^1x_1 - {}^2x_1\right)}_{-L} \Rightarrow \boxed{\Delta p_t = -\left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)L}$$

Cette relation montre que la perte de charge totale Δp_t est proportionnelle à la distance parcourue par le fluide. Dans ce cas, on dit que la *perte de charge est régulière*.

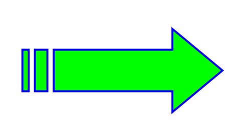
$$Q_v = -\frac{\pi}{128\mu}\left(\frac{dp_t}{dx_1}\right)D^4 \Rightarrow \boxed{Q_v = \frac{\pi}{128\mu}\frac{\Delta p_t}{L}D^4}$$

C'est la *formule de Poiseuille*

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

La perte de charge totale *Δp_t* peut aussi être exprimée soit en fonction du *débit volumique*, soit en fonction de la *vitesse moyenne* (*débitante*) de l'écoulement :

$$Q_v = V_m\, S = \frac{\pi}{128\mu}\,\frac{\Delta p_t}{L}\,D^4 \quad \Rightarrow \quad \Delta p_t = 128\,\mu\,L\,V_m\,\frac{S}{\pi\,D^4} = 128\,\mu\,L\,V_m\,\frac{\pi\,\frac{D^2}{4}}{\pi\,D^4}$$



$$\Delta p_t = \frac{32\,\mu\,L\,V_m}{D^2}$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

4. Coefficient de pertes de charge

Généralement, la perte de charge est couramment exprimée en fonction de la *pression cinétique* (ou *dynamique*) de l'écoulement dans la conduite : $\frac{1}{2}\rho V_m^2$

Ainsi, la perte de charge totale s'exprime sous la forme :

$$\Delta p_t = \frac{32\,\mu\,L\,V_m}{D^2} = \underbrace{\left(\frac{32\,\mu\,L\,V_m}{D^2}\cdot\frac{2}{\rho\,V_m^2}\right)}\frac{1}{2}\rho\,V_m^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{64\,\mu\,L}{\rho\,D^2\,V_m} = \frac{64\,\mu}{\rho\,V_m\,D}\,\frac{L}{D} = \frac{64}{Re}\,\frac{L}{D} = \lambda\,\frac{L}{D}$$

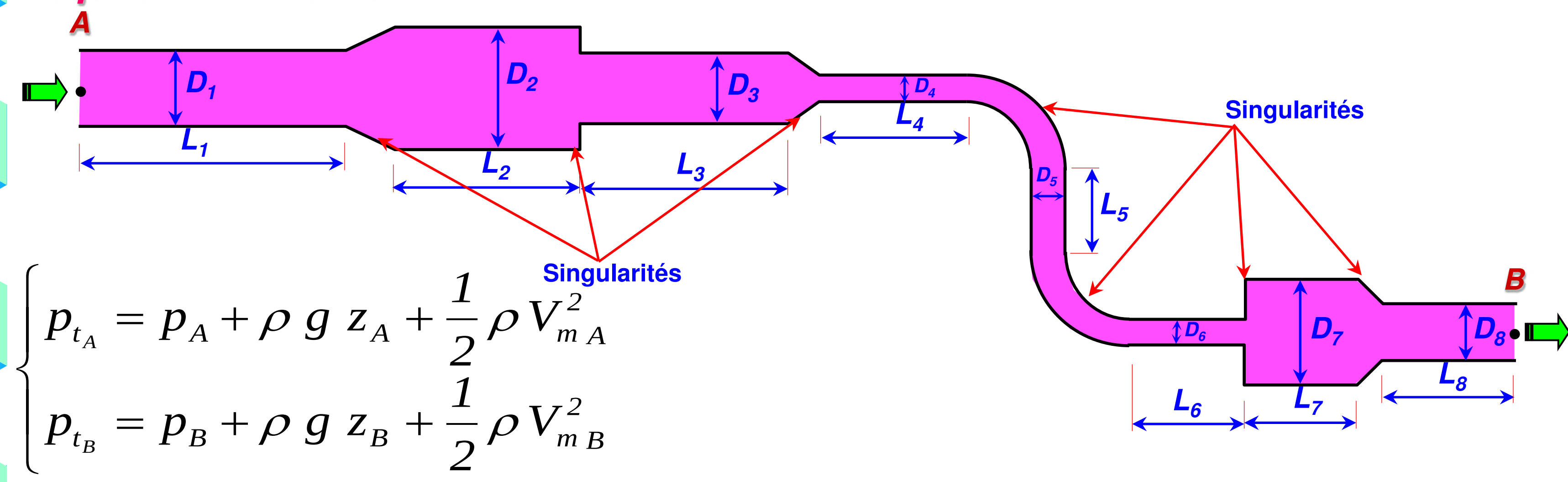
Coefficient sans dimension

Donc, pour un écoulement *laminaire* dans une conduite, on a : $\Delta p_t = \lambda\,\frac{L}{D}\,\frac{1}{2}\rho\,V_m^2$

$\lambda = \frac{64}{Re}$ → **est appelé *coefficient de perte de charge régulière* (valable pour Re<2000)**

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Dans le cas d'un écoulement dans une canalisation formée de plusieurs juxtapositions de *conduites droites* et de singularités, on peut alors généraliser l'*équation de Bernoulli* comme suite :



$$\begin{cases} p_{t_A} = p_A + \rho\, g\, z_A + \dfrac{1}{2}\rho V_{m\,A}^2 \\ p_{t_B} = p_B + \rho\, g\, z_B + \dfrac{1}{2}\rho V_{m\,B}^2 \end{cases}$$

$$\Delta p_t = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{1}{2}\rho V_{m\,1}^2 + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{1}{2}\rho V_{m\,2}^2 + \ldots + \lambda_n \frac{L_n}{D_n}\frac{1}{2}\rho V_{m\,n}^2 + \text{Pertes de charge singulières}$$

or $p_{t_A} = p_{t_B} + \Delta p_t$

$$p_A + \rho\, g\, z_A + \frac{1}{2}\rho V_{m\,A}^2 = p_B + \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho V_{m\,B}^2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i}\frac{1}{2}\rho V_{m\,i}^2 + \text{Pertes de charge singulières}$$

C'est l'*équation de Bernoulli généralisée*

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

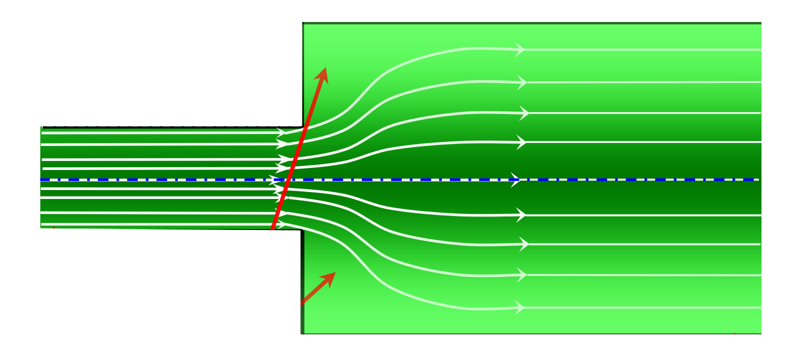
$$p_A + \rho\, g\, z_A + \frac{1}{2}\rho V_{m\,A}^2 = p_B + \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho V_{m\,B}^2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i}\frac{1}{2}\rho V_{m\,i}^2 + \text{Pertes de charge singulières}$$

Cette ***équation de Bernoulli généralisée*** reste valable quel que soit le régime de l'écoulement (laminaire, transitoire ou turbulent). Par contre, l'***expression de la perte de charge régulière*** λ_i doit être ***déterminé expérimentalement*** ou tiré ***d'abaques*** ($\lambda_i \neq 64/Re$).

Il ne reste alors qu'à étudier les pertes de charge singulières.

5. Pertes de charge singulières

On considère la *singularité* suivante représentant un élargissement brusque, et à travers laquelle s'écoule un *fluide incompressible*.



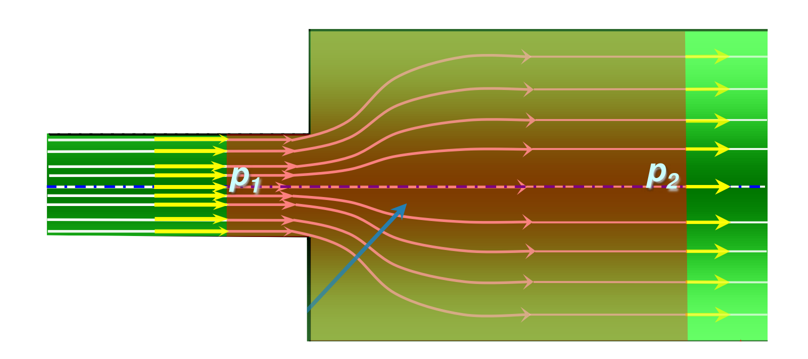
zones dites mortes ou zones de stagnation

zones de turbulence

pertes de charge singulières

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

On considère la ***singularité*** suivante représentant un **élargissement brusque**, et à travers laquelle s'écoule un ***fluide incompressible***.

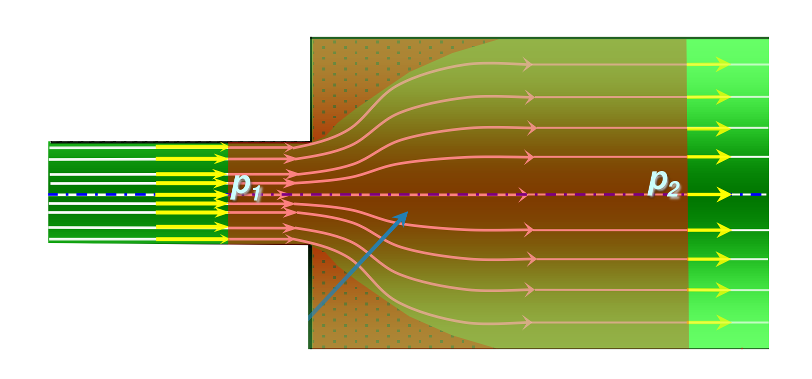


On choisit un **volume de contrôle** sur lequel on applique le ***théorème d'Euler***. Pour cela, on supposera qu'on a:

- Pressions et vitesses uniformes sur chaque section (amont et aval),
- **Pertes de charge régulières négligeables** sur **le rétrécissement** (sur *L*).

Ainsi, la projection sur l'axe x_1 donne :

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

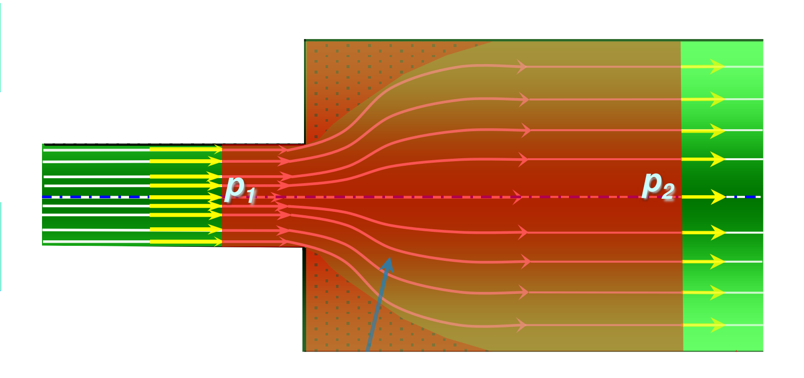


$Q_m .(V_{m\,2} - V_{m\,1})$ = *projection sur l'axe x_1 de la résultante des forces exercées sur le volume de contrôle* :

- **poussée en amont : $p_1 S_1$**
- **contre - poussée en aval : $- p_2 S_2$**
- **poussée de la paroi verticale sur la partie stagnante du fluide :**

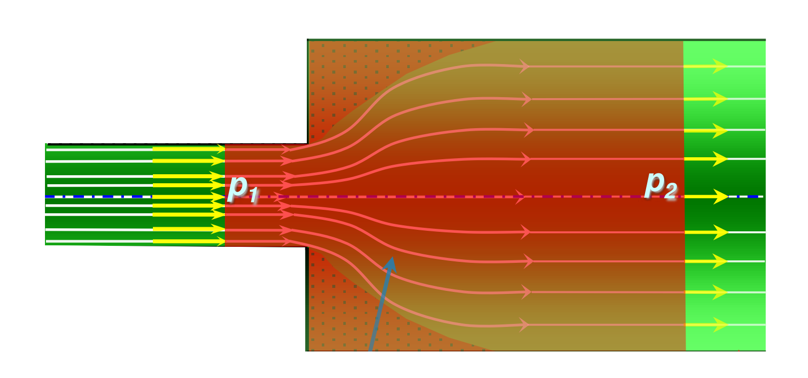
$+ p(S_2 - S_1)$ où $p = p_1$ → *(loi de l'hydrostatique)*

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE



Comme le fluide est supposé incompressible, donc le débit massique se conserve:

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

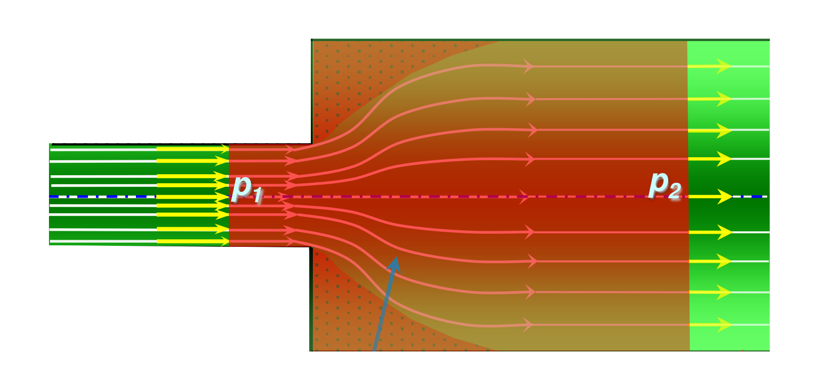


Comme le fluide est supposé incompressible, donc le débit massique se conserve:

$$\Rightarrow \quad p_1 + \frac{1}{2}\rho V_{m_1}^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_{m_2}^2 + \frac{1}{2}\rho\left(V_{m_1} - V_{m_2}\right)^2$$

perte de charge singulière

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

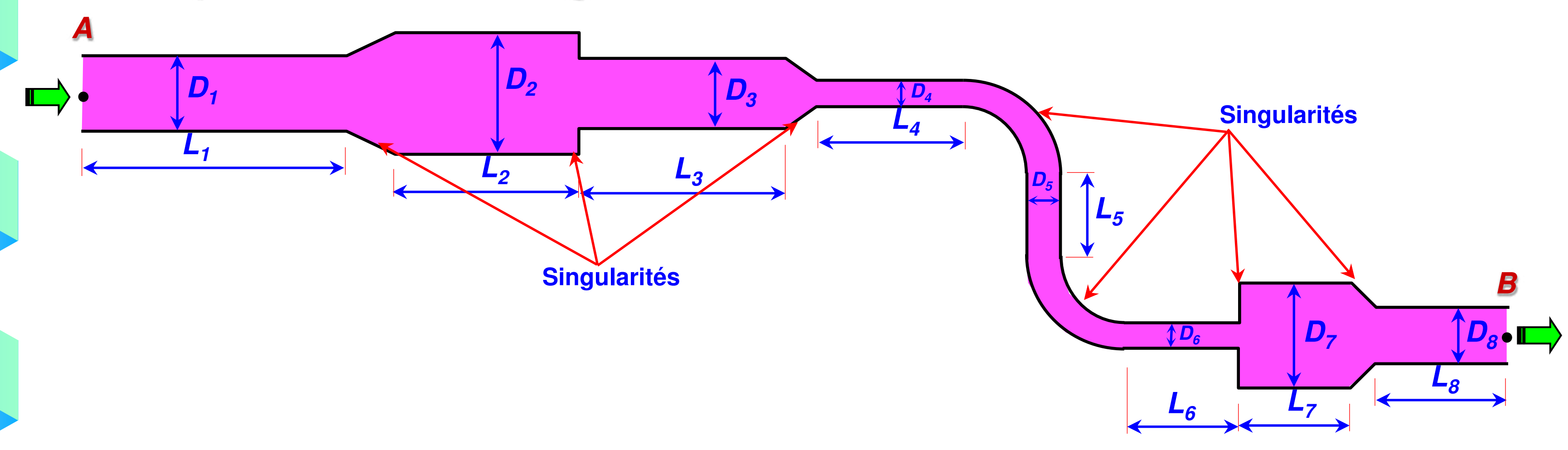


Soit l'expression finale :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_{m_1}^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_{m_2}^2 + \frac{1}{2}\rho V_{m_1}^2 \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_{m_2}^2 + \frac{1}{2}\rho V_{m_1}^2 K$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Ainsi, l'***équation de Bernoulli généralisée*** s'écrit :

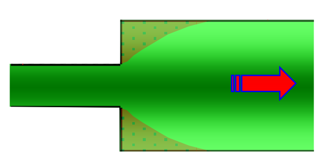


$$p_A + \rho\, g\, z_A + \frac{1}{2}\rho V_{m\,A}^2 = p_B + \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho V_{m\,B}^2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i}\frac{1}{2}\rho V_{m\,i}^2 + \sum_j K_j \frac{1}{2}\rho V_{m\,j}^2$$

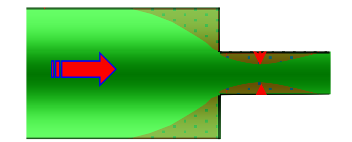
Ce sont les coefficients de perte de charge singulière qui sont associés à chaque singularité rencontrée au cours de l'écoulement.

Quelques singularités typiques :

Élargissement brusque



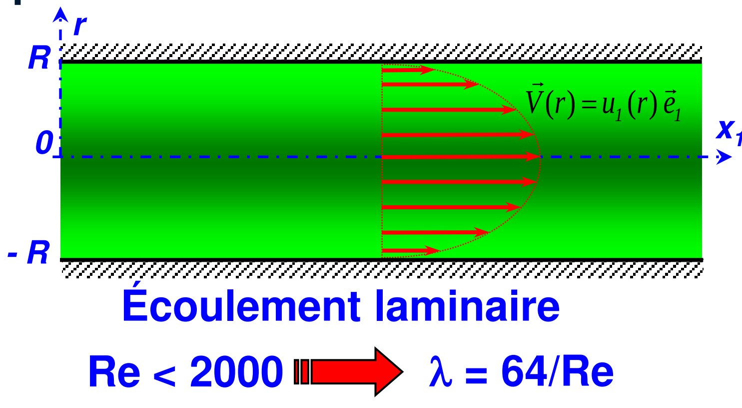
$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$



DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

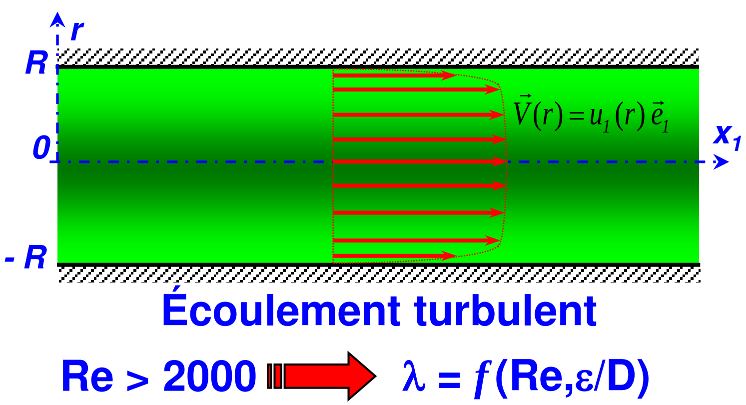
6. Pertes de charge en régime turbulent

Lors d'un écoulement turbulent, les profils de vitesse dans une conduite cylindrique n'est plus parabolique. La turbulence de l'écoulement fait que les vitesses deviennent uniformisées sur une large partie d'une section droite donnée de la conduite. Ainsi, une brusque variation de vitesse au voisinage des parois est alors constatée.



Écoulement laminaire

Re < 2000 ➡ λ = 64/Re



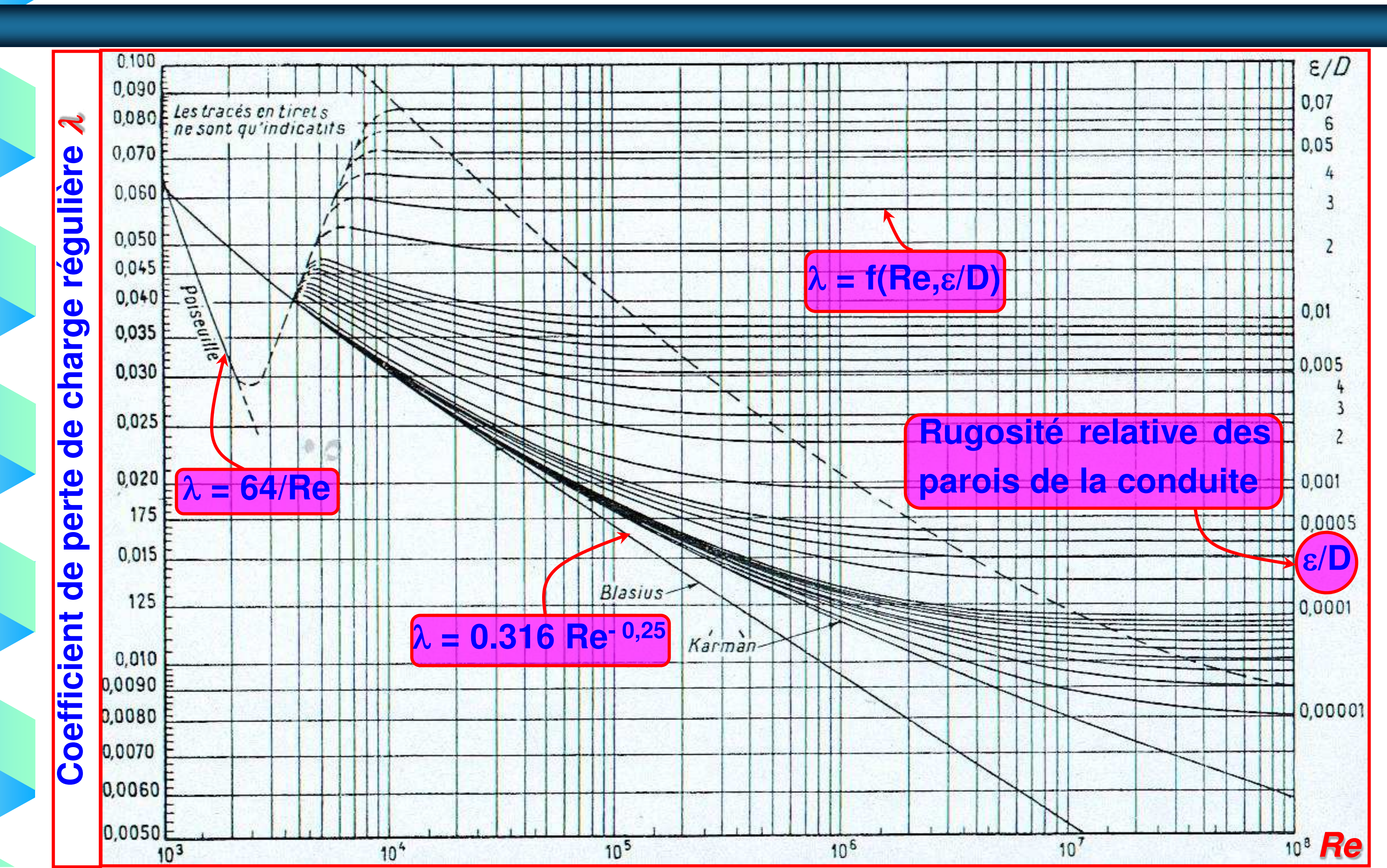
Écoulement turbulent

Re > 2000 ➡ λ = *f* (Re,ε/D)

L'équation de *Bernoulli généralisée* peut être toujours utilisée, mais le coefficient de perte de charge *λ doit être déterminé expérimentalement ou bien tiré d'abaques ou de lois empiriques*.

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Diagramme de MOODY



DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

7. Détermination numérique du diagramme de Moody

Étude de la perte de charge dans une conduite rugueuse

Calcul du coefficient de perte de charge linéaire λ dans une conduite

On considère un écoulement d'eau dans une conduite de diamètre D. On veut calculer le coefficient de perte de charge linéaire λ aux régimes laminaire et turbulent.

En régime laminaire ($Re \leq 2000$) la perte de charge est donnée par la formule de Poiseuille :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \qquad (1)$$

où Re est le nombre de Reynolds.

En régime turbulent ($4000 \leq \mathrm{Re} \leq 10^8$), le coefficient de perte de charge linéaire λ dépend à la fois du nombre de Reynolds Re et de la rugosité relative de la conduite ε/D.

Pour une conduite lisse ($\varepsilon/D=0$), cette perte de charge linéaire λ est donnée par la formule de Blasius :

$$\lambda = \frac{0{,}316}{Re^{0{,}25}} \qquad (2)$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Diagramme de MOODY

Pour une conduite rugueuse ($\varepsilon / D \neq 0$), la perte de charge linéaire λ peut être calculée selon la relation (non linéaire) de *Colebrook* :

$$\lambda^{-1/2} = -2.\log_{10}\left(\frac{\varepsilon}{3{,}71.D} + \frac{2{,}51}{Re.\lambda^{1/2}}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

où λ est le coefficient de perte de charge linéaire.

1°) Écrire un algorithme (sous Matlab©, par exemple) pouvant évaluer λ en régime laminaire et en régime turbulent (turbulent lisse et turbulent rugueux).

Indications **: Pour l'estimé initial de λ_0, on pourrait, par exemple, tracer la courbe f(λ) en fonction de λ, ensuite repérer la valeur de λ_0 pour accélérer la convergence. Si non, on pourrait toujours démarrer avec un estimé initial arbitraire et positif (valeur physique pour λ).**

2°) Tracer sur le même graphique (quadrillage) l'évolution de λ en fonction de Re en échelle logarithmique (log-log). Pour l'écoulement laminaire, on choisit un pas de 20 pour Re et pour l'écoulement turbulent, on choisit un pas adaptatif pour Re (évolution de Re par palier).

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Diagramme de MOODY

3°) Comparer les résultats obtenus numériquement avec ceux données par le diagramme de Moody, étudié précédemment.

On donne **:**

ε/D = de 10^{-5} à 10^{-4} tous 10^{-5},
de 2. 10^{-4} à 10^{-3} tous 10^{-4},
de 2. 10^{-3} à 10^{-2} tous 10^{-3}
de 2.10^{-2} à 7. 10^{-2} tous 10^{-2}

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Diagramme de MOODY

Algorithme de calcul du coefficient de perte de charge régulière sous Matlab©

```
%*****************************************************************************************
% Pertes de charge régulière dans une conduite rugueuse : Ecoulements laminaire et Turbulent %
%*****************************************************************************************

close all;clear all;clc;

% Régime laminaire
Re1 = [0.1 1:1:10 20:10:100 200:100:2000];
L1 = 64./Re1;

% Régime laminaire qui continue parfois jusqu'à Re=3500
Re12 = [2010:10:3500];
L12 = 64./Re12;

figure(1);
loglog(Re1,L1,Re12,L12,':m','LineWidth',1.5);grid on;
hold on;

% Régime turbulent dans une conduite lisse : Loi de Blasius
Re2 = [4000:1000:1e8];
L2 = 0.316*Re2.^(-0.25);
loglog(Re2,L2,'b','LineWidth',1.5);
%break
% Régime turbulent dans une conduite rugueuse : Colebrook
Re3 = [4000:1000:1e5 1.2e5:0.2e5:1e6 1.2e6:0.2e6:1e7 1.2e7:0.2e7:1e8];

% k1 = [1e-7 1e-6 5e-6 1e-5:1e-5:1e-4 2e-4:1e-4:1e-3 1.2e-3:1e-3:1e-2 1.2e-2:1e-2:2e-1]; % k1 = eps/D ===> Rugosité relative du tube;
k1 = [1e-5:1e-5:1e-4 2e-4:1e-4:1e-3 2e-3:1e-3:1e-2 2e-2:1e-2:7e-2]; % k1 = eps/D ===> Rugosité relative du tube;
```

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Diagramme de MOODY

```
k2 = 1/3.71;
k3 = 2.51./Re3;

n = 20000;                % Nombre maximal d'itérations
Er = 1e-10;               % Précision souhaitée

% Relaxation
w = 1.0;

N1 = length(k1);
N2 = length(k3);

% Drapeau
s = 0;

for i = 1:N1
    for j = 1:N2
        clear x;
        x(1) = -10; % Valeur arbitraire initiale de Lamda 0
```

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Diagramme de MOODY

```
        for k = 1:n
            f(k) = x(k) + 2*log10(k1(i).*k2 + k3(j)*x(k));
            dif(k) = 1 + (2/log(10))*(k3(j)/(k1(i)*k2 + k3(j)*x(k)));
            x(k+1) = x(k) - f(k)/dif(k);

            x(k+1) = x(k) + w*(x(k+1) - x(k)); % relaxation

            if abs(x(k+1) - x(k)) <= Er
                x(k) = x(k+1);
                L3(j) = x(k)^(-2);                   % Changement de variable
                N = k; s = 1;
                break;
            end
        end
    end
    if (i == 1) | (i == 2) | (i == 11) | (i == 20) | (i == 29) | (i == 35)
        loglog(Re3,L3,'g','LineWidth',1.5);
    else
        loglog(Re3,L3,'r');
    end
end
title('Evolution du coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds');
axis([1e3 1e8 5e-3 0.1]);
xlabel('Re'); ylabel('l','FontName','symbol');
```

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Diagramme de MOODY

```
gtext('<--- Laminaire (Poiseuille)');

gtext('Rugosité relative');

gtext('<--- Turbulent lisse (Blasius)'),gtext('e = 0','FontName','symbol');

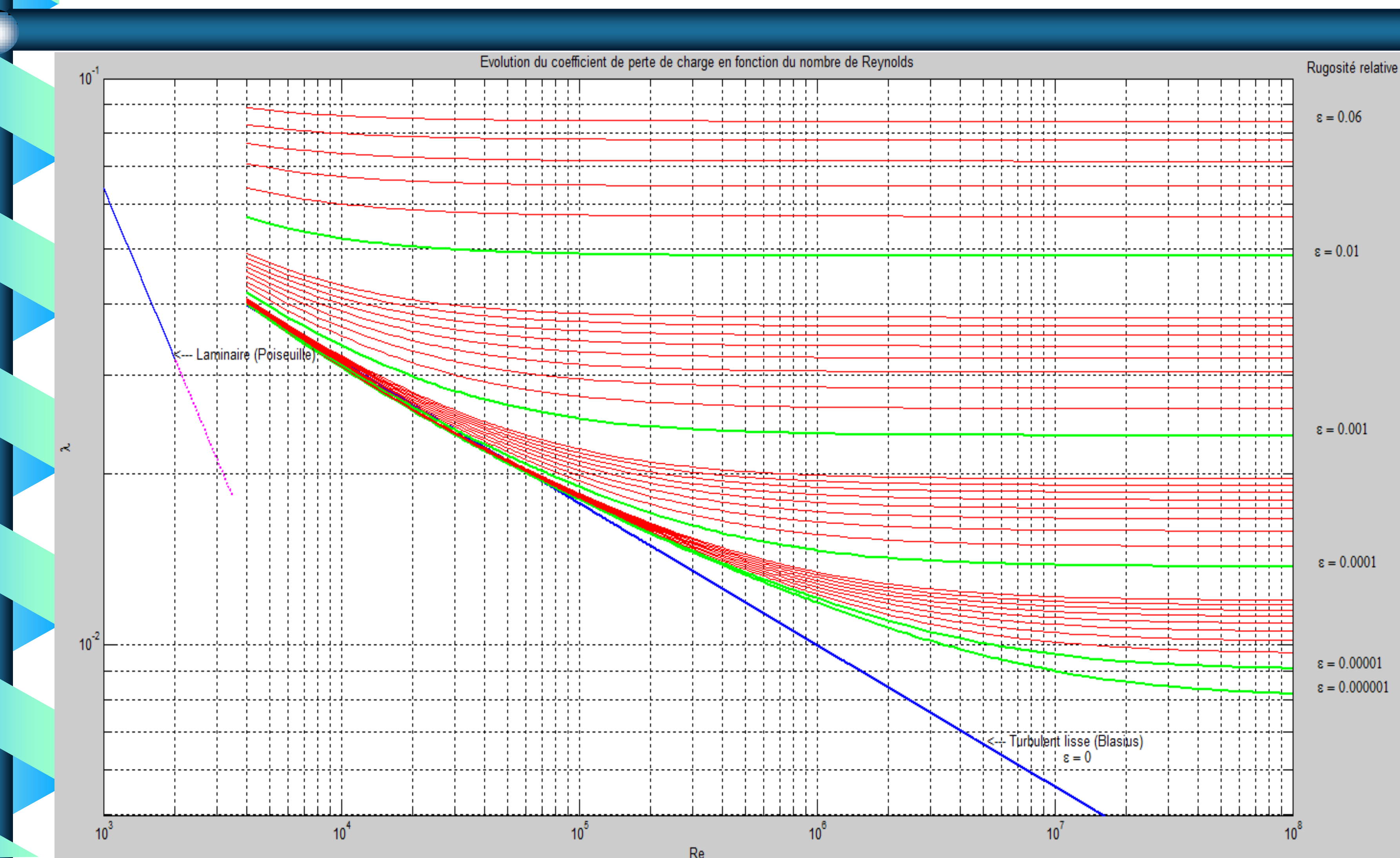
gtext('e = 0.000001','FontName','symbol');
gtext('e = 0.00001','FontName','symbol');
gtext('e = 0.0001','FontName','symbol');
gtext('e = 0.001','FontName','symbol');
gtext('e = 0.01','FontName','symbol');
gtext('e = 0.07','FontName','symbol');

break;
if s == 1
    figure(2);clear i;
    i = 1:N+1;
    plot(i,x.^-0.5);grid on;

    xlabel('Itérations');ylabel('Solutions Lamda');
    title('Evolution de la solution : coefficient de perte de charge');
end
```

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

Diagramme de MOODY

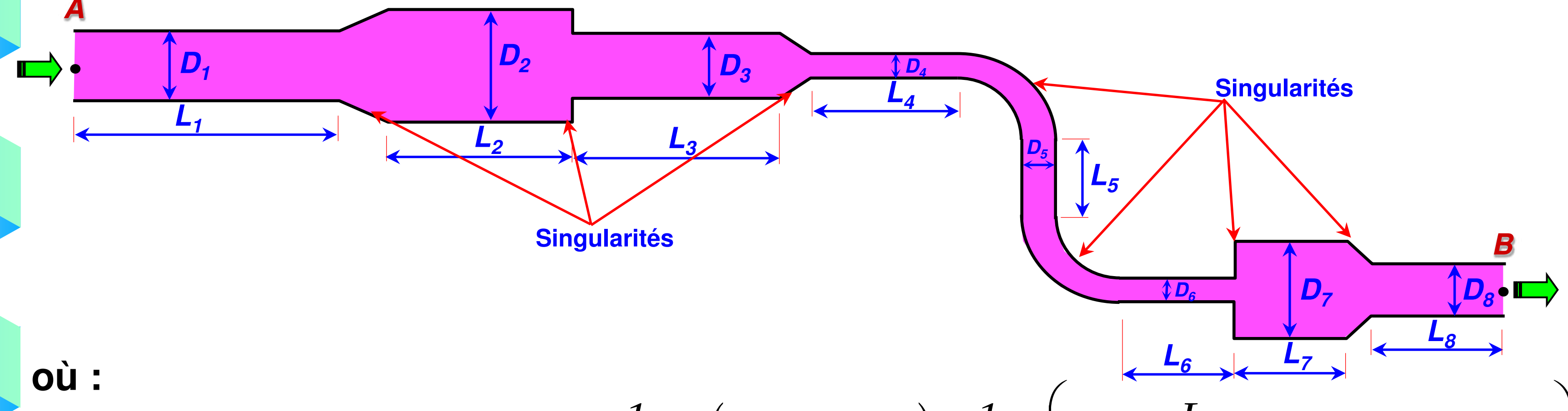


DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

8. Puissance hydraulique

La puissance hydraulique P_h nécessaire pour véhiculer un fluide réel (visqueux) dans une conduite comportant des singularités, est reliée au débit volumique Q_v et à la chute de pression Δp par l'expression :

$$P_h = \Delta p \, Q_v$$



où :

$$\Delta p = p_A - p_B = \rho\, g\,(z_B - z_A) + \frac{1}{2}\rho\left(V_{m\,B}^2 - V_{m\,A}^2\right) + \frac{1}{2}\rho\left(\sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} V_{m\,i}^2 + \sum_j K_j V_{m\,j}^2\right)$$

$$P_h = \rho\left(g\,(z_B - z_A) + \frac{1}{2}\left(\left(V_{m\,B}^2 - V_{m\,A}^2\right) + \left(\sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} V_{m\,i}^2 + \sum_j K_j V_{m\,j}^2\right)\right)\right) Q_v$$

DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX : PERTES DE CHARGE

8. Exercice d'application

On considère la conduite horizontale d'un pipe line de *150 mm* de diamètre transportant une huile en écoulement permanent, de masse volumique $\rho = 900\ kg/m^3$ et de viscosité dynamique ($\mu = 2x10^{-3}\ Pa.s$, à la vitesse moyenne de $V = 2\ m/s$). Le pipe line mesure *300 km* de longueur et chaque station de pompage est distante de *30 km* de la précédente.

1) Quelle est la puissance hydraulique effective de chacune des stations de pompage ?

2) Quelle est l'énergie totale dépensée pour transporter une tonne d'huile d'un bout à l'autre du pipe line ?

Chapitre 5

Analyse dimensionnelle et Similitude physique

Chapitre V

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

1. Introduction

Quand un système étudié est ***trop complexe*** pour permettre une résolution complète des équations fondamentales, ou bien lorsque son comportement est ***chaotique***, l'analyse dimensionnelle donne accès de façon simple à des relations entre les différentes grandeurs caractérisant ce système.

Ainsi, l'analyse dimensionnelle est une méthode qui permet d'obtenir des informations sur un phénomène à partir de l'hypothèse que ce phénomène puisse être décrit par une équation dimensionnellement correcte et liant certaines variables.

Avec un peu plus d'efforts, on obtient une solution partielle de presque tous les problèmes, et non pas une solution complète. En effet, le mécanisme intime du phénomène physique n'est pas révélé par cette analyse simple.

Sur le plan pratique, l'analyse dimensionnelle d'un problème permet :

a) de réduire le nombre de variables et par suite facilite beaucoup l'exploitation des résultats,

b) d'étudier sur une réplique à petite échelle (maquette) les performances d'une machine (prototype) à construire. Le passage, de résultats obtenus par l'analyse dimensionnelle sur la maquette, aux performances réelles du prototype, s'effectue à l'aide des règles de la similitude qui seront développées dans la suite de ce cours.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

2. Analyse dimensionnelle

2.1. Entités de la physique (grandeurs, unités et mesures)

Tout raisonnement scientifique est basé sur le concept d'entités qui sont caractérisées par des ***effets observables***. La ***force***, la ***masse***, le ***temps***, l'***accélération***, la ***vitesse***, la ***température***, la ***charge***, le ***courant électrique***, etc., sont des entités observables. Chacune de ces entités possède une propriété appelée « ***grandeur*** ». Les « ***grandeurs*** » peuvent être considérées comme des concepts abstraits.

Par des procédés physiques, on peut établir une correspondance biunivoque entre les « ***grandeurs*** » d'une entité et une suite de nombres réels. On définit ainsi un système de mesure pour l'entité considérée.

Pour mesurer la grandeur « G_i » d'une entité (G_i), le moyen le plus simple consiste à le comparer à une grandeur de même espèce prise comme « ***unité*** ».

La mesure s'exprime par un nombre réel « n_i », qui indique combien de fois l'unité « u_i » est comprise dans « G_i ». L'écriture symbolique est donc :

$$G_i = n_i.u_i \qquad (1)$$

Si la grandeur Gi mesurée à l'aide de l'unité u_i, s'exprime par un nombre (mesure n_i), la même grandeur mesurée à l'aide d'une unité de mesure u'_i, s'exprimera par un nombre (mesure u'_i), tel que :

$$n_i.u_i = n'_i.u'_i \qquad (2)$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

2.2. Grandeurs et unités primaires et secondaires

Suivant une convention très largement respectée, trois entités peuvent être considérées comme entités primaires ou principales. Ce sont : la ***longueur***, la ***masse*** et le ***temps*** (***L***,***M***,***T***). Ce choix ainsi que le nombre de ces entités, seront discutés ultérieurement.

On attribue des unités arbitraires dites « ***unités primaires*** » à ces entités (u_L, u_M, u_T). Par définition, les unités primaires n'ont aucune correspondance entre elles.

Toutes les grandeurs physiques G_i qui ont des caractères définissables à partir des grandeurs primaires par des relations monômes du type (3) sont des grandeurs secondaires ou dérivées.

$$G_i = L^{\alpha i} M^{\beta i} T^{\gamma i} \quad (3)$$

On peut aussi définir des ***unités dérivées*** permettant la mesure des grandeurs G_i.

Soit, par exemple :

$$u_i = u_L^{\alpha i} u_M^{\beta i} u_T^{\gamma i} \quad (4)$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Il existe entre les mesures exprimées par des nombres réels n_i, des relations du type :

$$n_i = n_L^{\alpha i} n_M^{\beta i} n_T^{\gamma i} \quad (5)$$

Les grandeurs physiques Gi, dérivées des grandeurs primaires L, M et T sont symbolisées par des équations dites « aux dimensions ».

$$[G_i] = [L^{\alpha i} M^{\beta i} T^{\gamma i}] \quad (6)$$

Nous allons limiter le nombre de grandeurs primaires à trois : longueur, masse et temps. Mais, on trouve aussi souvent :

- ***En thermodynamique*** : la température θ et la quantité de chaleur Q
- ***En électricité*** : la charge électrique q.

Dans ces deux cas, on peut montrer que si le choix de ces grandeurs comme grandeurs primaires peut s'avérer parfois utile, il n'est en aucun cas nécessaire.

En effet, le premier principe de la thermodynamique dit qu'il y a équivalence entre énergie mécanique W et quantité de chaleur Q reçue ou cédée par le système en évolution cyclique, à condition de considérer Q comme un nombre pur. Dans ce cas, on peut écrire que :

$$[Q_i] = [L^2 . M . T^2] \quad (7)$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Quelques dimensions des unités usuelles en mécanique

Entités	Systèmes (L,M,T)
Longueur	L
Surface	L^2
Volume	L^3
Masse	M
Temps	T
Force	$L. M.T^{-2}$
Angle	1
Vitesse angulaire	T^{-1}
Accélération angulaire	T^{-2}
Vitesse	$L.T^{-1}$
Accélération	$L.T^{-2}$
Masse volumique	$L^{-3}. M$
Poids	$L. M.T^{-2}$
Poids volumique	$L^{-2}. M.T^{-2}$
Pression ou contrainte	$L^{-1}. M.T^{-2}$
Moment d'une force	$L^2. M.T^{-2}$
Travail	$L^2. M.T^{-2}$
Puissance	$L^2. M.T^{-2}$
Quantité de mouvement	$L. M.T^{-1}$
Viscosité dynamique	$L^{-1}. M.T^{-1}$
Viscosité cinématique	$L^2.T^{-1}$
Tension superficielle	$M. T^{-1}$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

2.3. Principe d'homogénéité

Les relations physiques que l'on traduit par des équations, font intervenir des opérations élémentaires de type somme, produit ou fonctions plus complexes qui sont elles mêmes définies si et seulement si, la valeur donnée par la variable est un nombre pur.

Ces relations doivent rester valables quelles que soient les unités adoptées en restant toutefois dans un système cohérent.

La découverte de la loi physique consiste, justement, à chercher la relation mathématique entre grandeurs G_i :

$$f(G_1, G_2, G_3, G_4, \ldots, G_i, \ldots, G_n) = 0 \qquad (8)$$

L'équation possédant la *propriété particulière d'être indépendante des unités choisies pour mesurer les diverses grandeurs*, permet d'écrire :

$$f(n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots, n_i, \ldots, n_n) = 0 \qquad (9)$$

Remarque :

Pour qu'une *équation ait un sens de point de vue physique*, l'*homogénéité dimensionnelle* est une *condition nécessaire* mais *pas suffisante*.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

2.4. Grandeurs fondamentales

Les systèmes d'unité couramment utilisés reposent sur des unités primaires (L,M,T). Mais, on ne peut concevoir un système d'unités cohérent basé sur d'autres grandeurs, dites fondamentales.

Le nouveau système d'unités sera cohérent si une grandeur *G_i* possède dans ce système fondamental, une *unité de mesure définie sans ambigüité*.

Soit, par exemple F_1, F_2 et F_3 les grandeurs choisies comme grandeurs fondamentales. La grandeur *G_i* doit avoir une dimension unique par rapport à F_1, F_2 et F_3 et par suite, il doit être possible d'écrire.

$$\left[G_i\right]=\left[F_1^{x_{i1}}.F_2^{x_{i2}}.F_3^{x_{i3}}\right] \qquad (10)$$

où x_{i1}, x_{2i} et x_{3i} sont les coefficients inconnus recherchés.

Dans un *système primaire* (*L*,*M*,*T*), les équations aux dimensions des grandeurs G_i, F_1, F_2 et F_3 sont supposées connues :

$$\left[G_i\right]=\left[L^{\alpha_{i1}}.M^{\alpha_{i2}}.T^{\alpha_{i3}}\right] \qquad (11)$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} [F_1] = [L^{\alpha_{11}}.M^{\alpha_{12}}.T^{\alpha_{13}}] \\ [F_2] = [L^{\alpha_{21}}.M^{\alpha_{22}}.T^{\alpha_{23}}] \\ [F_3] = [L^{\alpha_{31}}.M^{\alpha_{32}}.T^{\alpha_{33}}] \end{cases} \qquad (12)$$

La substitution dans l'équation (10) de F1, F_2 et F_3 (équation (12)) et l'identification des exposants de L, M, T ainsi obtenus avec ceux de l'équation (11), conduit à la résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \alpha_{11}.x_{i1} + \alpha_{12}.x_{i2} + \alpha_{13}.x_{i3} = \alpha_{i1} \\ \alpha_{21}.x_{i1} + \alpha_{22}.x_{i2} + \alpha_{23}.x_{i3} = \alpha_{i2} \\ \alpha_{31}.x_{i1} + \alpha_{32}.x_{i2} + \alpha_{33}.x_{i3} = \alpha_{i3} \end{cases} \qquad (13)$$

Ce système doit admettre une solution unique non nulle, traduisant l'indépendance dimensionnelle des grandeurs F_1, F_2 et F_3.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

La condition s'exprime par le déterminant non nul du système linéaire :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \textbf{(14)}$$

De façon plus générale, soit *p* le rang de la matrice dimensionnelle du tableau des exposants dans le système primaire des *n* grandeurs intervenant dans le phénomène étudié (le rang d'une matrice est l'ordre le plus élevé d'un déterminant non nul formé dans cette matrice).

Il est donc possible de définir (*n-p*) produits sans dimensions, appelé souvent « *groupements* π », constitués au moyen des *p* grandeurs fondamentales (ces grandeurs fondamentales sont celles dont les exposants dans le système primaire, forment un déterminant non nul).

Soient : $F_1 \equiv G_1$, $F_2 \equiv G_2$; $F_3 \equiv G_3$; … ; $F_p \equiv G_p$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Les groupements π_i associés aux grandeurs, dites dérivées, sont obtenues de la façon suivante :

$$\pi_i = \frac{1}{F_1^{x_{i1}}.F_2^{x_{i2}}.F_3^{x_{i3}}....F_p^{x_{ip}}}.G_i \qquad (15)$$

Les exposants x_{ij} ($p+1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$) sont obtenus par la résolution du système d'équations (13) obtenu précédemment.

On obtient alors (n - p) groupements sans dimensions.

Vashy en 1890, puis ***Buckingham*** peu de temps après, avaient énoncé un théorème connu sous le nom de ***Vashy-Buckingham*** ou encore théorème π.

Ce théorème dit, qu'une équation entre ***n grandeurs*** (éq. (8)) peut être mise sous la forme d'une équation entre (n-p) groupements sans dimensions, p étant le nombre maximum de grandeurs dimensionnellement indépendantes qui interviennent dans l'équation considérée.

Ainsi, par application de l'équation (8), et en introduisant les groupements π, cette équation (8) devient grâce au théorème de Vashy-Buckingham :

$$F(\pi_{p+1}, \pi_{p+2}, \pi_{p+3},\ldots, \pi_n) = 0 \qquad (16)$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Remarque :

L'équation (16) peut aussi s'écrire de façon à particulariser un groupement π qui apparait alors comme une fonction des (n - (p-1)) autres :

$$\pi_{p+1} = \psi(\pi_{p+2}, \pi_{p+3}, \ldots, \pi_n) \qquad (17)$$

Dans tous les cas, *l'analyse dimensionnelle ne peut donner aucune indication sur la fonction* F ou sur la fonction ψ. *Seule, l'expérience peut permettre la formulation la plus complète d'une loi physique*.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

2.5. Comment poser un problème en analyse dimensionnelle ?

Lors de la phase préparatoire à l'étude d'un problème par l'analyse dimensionnelle, il convient de :

a) Récapituler les grandeurs actives,

b) Choisir les grandeurs fondamentales,

c) Former les groupements π suivant la technique exposée précédemment,

d) Formuler la loi sous la forme :

$$F(\pi_{p+1}, \pi_{p+2}, \pi_{p+3}, \ldots, \pi_n) = 0 \qquad (18)$$

ou bien :

$$\pi_{p+1} = \psi(\pi_{p+2}, \pi_{p+3}, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_n) \qquad (19)$$

e) Recourir à l'expérimentation pour préciser la loi physique.

La loi, une fois formulée sous la forme (18) ou (19), n'est pas entièrement définie. Car, l'analyse dimensionnelle ne peut pas faire apparaitre les constantes pures, les exposants, etc. Il y a lieu alors de recourir à l'expérience.

On fait varier les groupements π les uns après les autres afin de déterminer leur degré d'intervention.

L'expérience permet de mettre en évidence les grandeurs actives et/ou de faire apparaître les grandeurs qui n'interviennent pas dans le phénomène étudié.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

2.7. Exemples

Étude de la perte de pression motrice dans une conduite rectiligne

Considérons un fluide de mase volumique ρ, de viscosité dynamique µ, s'écoulant à la vitesse moyenne V, dans une conduite de diamètre D et de rugosité de surface e (hauteur statistique moyenne des rugosités). On souhaite trouver la loi de perte de pression motrice $\Delta\hat{p}$ **sur une longueur ΔL de la conduite.**

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Solution

Les grandeurs actives sont : D, e, ΔL, ρ, μ, $\Delta\hat{p}$ et V.

La matrice dimensionnelle est de ***rang 3***. Elle s'écrit ainsi :

	D	e	ΔL	ρ	μ	$\Delta\hat{p}$	V
L	1	1	1	-3	-1	-1	1
M	0	0	0	1	1	1	0
T	0	0	0	0	-1	-2	-1

Prenons comme grandeurs fondamentales : D, ρ et V.

On vérifie dans un premier temps que ces trois grandeurs sont dimensionnellement indépendantes, puisque :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

On calcule ensuite les groupements π associés aux grandeurs : e, ΔL, μ et $\Delta\hat{p}$:

Calculons par exemple le groupement $\Delta\hat{p}$:

D'après le cours, on sait que :

$$\pi_{\Delta\hat{p}} = \frac{\Delta\hat{p}}{D^{x_1}.\rho^{x_2}.V^{x_3}}$$

Les exposants x_1, x_2 et x_3 sont obtenus par la résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} (1).x_1 + (-3).x_2 + (1).x_3 = -1 \\ (0).x_1 + (1).x_2 + (0).x_3 = 1 \\ (0).x_1 + (0).x_2 + (-1).x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + -3.x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 = 1 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$

On trouve alors : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

D'où le groupement :

$$\pi_{\Delta\hat{p}} = \frac{\Delta\hat{p}}{D^0.\rho^1.V^2}$$

Soit :

$$\pi_{\Delta\hat{p}} = \frac{\Delta\hat{p}}{\rho.V^2}$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

En procédant de la même manière pour e, ΔL et µ, on trouve :

$$\begin{cases} \pi_e = \dfrac{e}{D} \\ \pi_{\Delta L} = \dfrac{\Delta L}{D} \\ \pi_\mu = \dfrac{\mu}{D.\rho.V} \end{cases}$$

Le théorème de Vashy-Buckingham s'écrit alors :

$$F\left(\frac{\Delta\hat{p}}{\rho.V^2}, \frac{e}{D}, \frac{\Delta L}{D}, \frac{\mu}{D.\rho.V}\right) = 0$$

ou encore, en particularisant le groupement $\pi_{\Delta\hat{p}}$, on obtient :

$$\frac{\Delta\hat{p}}{\rho.V^2} = \psi\left(\frac{e}{D}, \frac{\Delta L}{D}, \frac{\mu}{D.\rho.V}\right)$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

L'expérience, ou plus simplement la connaissance élémentaire du phénomène étudié, permet de prévoir l'intervention du groupement *$\Delta L/D$* comme *facteur multiplicatif à la puissance 1*. C'est-à-dire que la loi recherchée peut prendre la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\Delta\hat{p}}{\rho.V^2} = \frac{\Delta L}{D}.\psi\left(\frac{e}{D}, \frac{\mu}{D.\rho.V}\right)$$

À ce stade, l'analyse du problème ne peut plus être poursuivie, et il faut recourir à l'expérience pour aller plus en avant dans la formulation de la loi.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Remarque **:**

Le groupement *e/D* s'appelle rugosité relative (ε), et le groupement *$\mu/(D.\rho.V)$* est l'inverse du nombre de Reynolds Re. Il s'en suit que la loi peut s'écrire :

$$\frac{\Delta\hat{p}}{\rho.V^2} = \frac{\Delta L}{D}.\psi(\varepsilon, \mathrm{Re})$$

- Si Re < 2000 ➔ l'écoulement est laminaire,
- Si Re > 4000 à 5000 ➔ l'écoulement est turbulent,
- Si 2000 < Re < 4000 à 5000 ➔ l'écoulement est transitoire.

La théorie des écoulements laminaires et les expériences effectuées en écoulement turbulent, confirment la forme de la loi que l'on écrit souvent :

$$\frac{\Delta\hat{p}}{\rho.V^2} = \lambda.\frac{\Delta L}{D}$$

où λ est le coefficient de perte de charge de la conduite, avec :

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$ ➔ **en écoulement laminaire,**

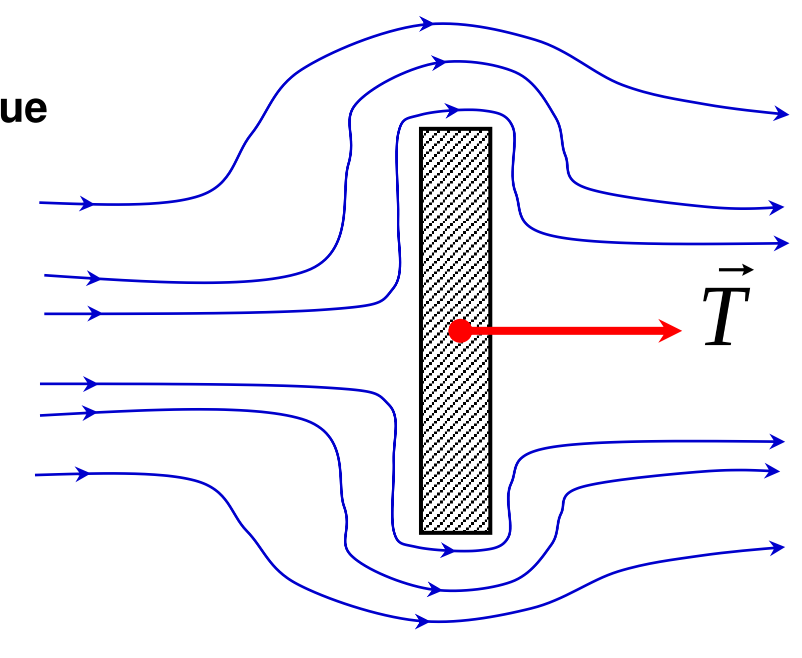
$$\lambda = f(\varepsilon, \mathrm{Re})$$ ➔ **en écoulement turbulent.**

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Écoulement autour d'un objet

On appelle force de traînée, la force exercée par un écoulement sur un objet, dans la direction parallèle à l'écoulement.

Nous allons étudier le cas d'une plaque plane rectangulaire.



1- Les variables du problème sont :
T, h, L, V, μ et *ρ* $\Longrightarrow n = 6$

où :

- ***T*** : force de traînée
- ***H*** : hauteur de la plaque
- ***L*** : largeur de la plaque
- ***V*** : vitesse de l'écoulement
- ***ρ*** : masse volumique du fluide

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

2- Équations aux dimensions :

$$\left.\begin{aligned}
[T] &= \left[M^{1}.L^{1}.T^{-2}\right] = \left[M.L.T^{-2}\right] \\
[h] &= \left[M^{0}.L^{1}.T^{0}\right] = [L] \\
[L] &= \left[M^{0}.L^{1}.T^{0}\right] = [L] \\
[V] &= \left[M^{0}.L^{1}.T^{-1}\right] = \left[L.T^{-1}\right] \\
[\mu] &= \left[M^{1}.L^{-1}.T^{-1}\right] = \left[M.L^{-1}.T^{-1}\right] \\
[\rho] &= \left[M^{1}.L^{-3}.T^{0}\right] = \left[M.L^{-3}\right]
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} M, L, T \\ \Downarrow \\ p = 3 \end{matrix}$$

3- Nombre de produits π sans dimension : *$n - p = 6 - 3 = 3$*

4- Choix de *$p = 3$* variables primaires dimensionnellement indépendantes :

➔ **Par exemple *h*, *ρ* et *V***

(Remarque : On ne peut pas choisir à la fois *h* et *L*)

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

5- Formulation des 3 produits π :

Par combinaison des variables primaires et non primaire

$\pi_1 = T/(h^{\alpha 1}.\rho^{\beta 1}.V^{\gamma 1})$

$\pi_2 = L/(h^{\alpha 2}.\rho^{\beta 2}.V^{\gamma 2})$

$\pi_3 = \mu/(h^{\alpha 3}.\rho^{\beta 3}.V^{\gamma 3})$

$$\pi_1 = \frac{T}{h^{\alpha_1}.\rho^{\beta_1}.V^{\gamma_1}} \Rightarrow$$ **Sans dimension**

$$\Downarrow$$

$$\pi_1 = L^0.M^0.T^0 = \left(L^1.M^1.T^{-2}\right).\left(L^{-\alpha_1}\right).\left(L^{-3}.M^1\right)^{-\beta_1}.\left(L^1.T^{-1}\right)^{-\gamma_1} = L^{(1-\alpha_1+3.\beta_1-\gamma_1)}.M^{(1+0-\beta_1+0)}.T^{(-2+0+0+\gamma_1)}$$

Ce qui se traduit par le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 0 = 1-\alpha_1+3.\beta_1-\gamma_1 \\ 0 = 1+0-\beta_1+0 \\ 0 = -2+0+0+\gamma_1 \end{cases}$$ **ou :** $$\begin{cases} -\alpha_1+3.\beta_1-\gamma_1 = -1 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 2 \end{cases}$$ **ou encore :** $$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 2 \end{cases}$$

Soit : $$\pi_1 = \frac{T}{\rho.V^2.h^2}$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

$$\pi_2 = \frac{L}{h^{\alpha_2}.\rho^{\beta_2}.V^{\gamma_2}} \Rightarrow$$ **Sans dimension**

$$\Downarrow$$

$$\pi_2 = L^0.M^0.T^0 = \left(L^1.M^0.T^0\right).\left(L^{-\alpha_2}\right).\left(L^{-2}.M^1\right)^{-\beta_2}.\left(L^1.T^{-1}\right)^{-\gamma_2} = L^{\left(1-\alpha_2+3.\beta_2-\gamma_2\right)}.M^{\left(0+0-\beta_2+0\right)}.T^{\left(0+0+0+\gamma_2\right)}$$

Ce qui se traduit par le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 0 = 1-\alpha_2+3.\beta_2-\gamma_2 \\ 0 = 0+0-\beta_2+0 \\ 0 = 0+0+0+\gamma_2 \end{cases}$$ **ou :** $$\begin{cases} -\alpha_2+3.\beta_2-\gamma_2 = -1 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases}$$ **ou encore :** $$\begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Soit : $$\pi_2 = \frac{L}{h}$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

$$\pi_3 = \frac{\mu}{h^{\alpha_3}.\rho^{\beta_3}.V^{\gamma_3}} \Rightarrow$$ **Sans dimension**

$$\Downarrow$$

$$\pi_2 = L^0.M^0.T^0 = \left(L^{-1}.M^1.T^{-1}\right).\left(L^{-\alpha_3}\right).\left(L^{-3}.M^1\right)^{-\beta_3}.\left(L^1.T^{-1}\right)^{-\gamma_3} = L^{\left(-1-\alpha_3+3.\beta_3-\gamma_3\right)}.M^{\left(1+0-\beta_3+0\right)}.T^{\left(-1+0+0+\gamma_3\right)}$$

Ce qui se traduit par le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 0 = -1-\alpha_3+3.\beta_3-\gamma_3 \\ 0 = 1+0-\beta_3+0 \\ 0 = -1+0+0+\gamma_3 \end{cases}$$ **ou :** $$\begin{cases} -\alpha_3+3.\beta_3-\gamma_3 = +1 \\ \beta_3 = 1 \\ \gamma_3 = 1 \end{cases}$$ **ou encore :** $$\begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \beta_3 = 1 \\ \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

Soit : $$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho.V.h} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

6- Formulation des 3 produits π trouvés :

$$T = f(h, L, V, \mu, \rho) \Rightarrow \quad \pi_1 = g(\pi_2, \pi_3)$$

avec : $\pi_1 = \dfrac{T}{\rho . V^2 . h^2}$ $\quad \pi_2 = \dfrac{L}{h}$ $\quad \pi_3 = \dfrac{\mu}{\rho . V . h}$

Soit : $$T = \rho . V^2 . h^2 . \pi_1 = \rho . V^2 . h^2 . g(\pi_2, \pi_3) = \rho . V^2 . h^2 . g\left(\frac{L}{h}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right)$$

Facteur de forme ($\frac{L}{h}$)

Nature de l'écoulement ($\frac{1}{\mathrm{Re}}$)

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Illustration de l'intérêt de la méthode :

Si T_1 est la traînée mesurée sur une plaque de dimension L_1 x h_1 quand elle est soumise à un écoulement de vitesse V_1, alors :

$$\frac{T_1}{\rho_1 . V_1^2 . h_1^2} = g\left(\frac{L_1}{h_1}, \frac{1}{\mathrm{Re}_1}\right) \quad \text{où :} \quad \mathrm{Re}_1 = \frac{\rho_1 . V_1 . h_1}{\mu_1}$$

L'analyse dimensionnelle via le théorème de Vashy-Buckingham permet d'en déduire que pour une plaque de dimensions L_2 x h_2 telles que :

$$\frac{L_2}{h_2} = \frac{L_1}{h_1}$$

si : $V_2 = \frac{h_1}{h_2} . V_1 \Leftrightarrow h_1 . V_1 = h_2 . V_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2$

Similitude de forme — **Facteur d'échelle** — **Similitude hydrodynamique**

et donc : $g\left(L_1 / h_1 , 1/\mathrm{Re}_1\right) = g\left(L_2 / h_2 , 1/\mathrm{Re}_2\right)$ **et si :** $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\rho . V_1^2 . h_1^2} = \frac{T_2}{\rho . V_2^2 . h_2^2} \Rightarrow T_2 = \frac{V_2^2 . h_2^2}{V_1^2 . h_1^2} . T_1 \Rightarrow T_2 = T_1$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

3. Coefficients sans dimensions usuels

Outre le nombre de Reynolds (pour définir le caractère laminaire ou turbulent d'un écoulement), il existe un certain nombre de grandeurs sans dimension qui peuvent aussi caractériser la nature d'un écoulement :

Nombre de *Reynolds* : $$\mathrm{Re} = \frac{\rho . V . L}{\mu}$$ ⇒ **forces d'inertie / forces de viscosité**

↳ ***importance générale pour tout type d'écoulement.***

Nombre de *Froude* : $$Fr = \frac{V}{\sqrt{g . L}}$$ ⇒ **forces d'inertie / forces de gravité**

↳ ***importance pour les écoulements à surfaces libres.***

Remarque :

C'est la pesanteur qui est responsable de la forme de la surface libre : Plus *Fr* est grand, moins la surface libre a d'effet sur l'écoulement et inversement.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Nombre d'*Euler* : $$Eu = \frac{\Delta p}{\rho . V^2}$$ ⇒ $\dfrac{\text{forces de pression}}{\text{forces d'inertie}}$

importance s'il existe de grandes différences de pression au sein d'un écoulement.

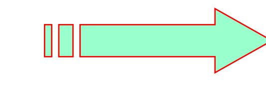
Nombre de *Mach* : $$Ma = \frac{V}{a}$$ ⇒ $\dfrac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de compressibilité}}$

importance pour les écoulements de fluides compressibles.

avec : $$a = \sqrt{\gamma . r . T} = \sqrt{\gamma . \frac{p}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\rho . \chi}}$$

et $$\chi = -\frac{1}{\upsilon} . \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial p} \right)_T$$ **Coefficient de compressibilité isotherme.**

Nombre de *Strouhal* : $$St = \frac{\omega . L}{V}$$ ⇒ $\dfrac{\text{forces d'inertie locales}}{\text{forces d'inertie convectives}}$



importance pour les écoulements instationnaires.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Nombre de ***Weber***	$We = \frac{\rho . V^2 . L}{\sigma}$
Nombre de ***Fourrier***	$Fo = \frac{\lambda . t}{\rho . \overline{C}_p . L^2}$
Nombre de ***Nusselt***	$Nu = \frac{\alpha . L}{\lambda}$
Nombre de ***Sherwood***	$Sh = \frac{K . L}{D}$
Nombre de ***Prandtl***	$\Pr = \frac{\overline{C}_p . \mu}{\lambda}$
Nombre de ***Peclet***	$Pe = \frac{\rho . \overline{C}_p . V . L}{\lambda}$
Nombre de ***Margoulis (ou nombre de Stanton)***	$M = St = \frac{\alpha}{\rho . \overline{C}_p . V}$
Nombre de ***Graetz***	$G = \frac{\dot{m} . \overline{C}_p}{\lambda . L}$
Nombre de ***Grashof***	$Gr = \frac{\beta . \Delta T . g . \rho^2 . L^3}{\mu^2}$

où :

V : vitesse
L : longueur
ρ : masse volumique
C_p : capacité calorifique
λ : conductivité thermique
t : temps
K : coefficient de transfert de masse
D : Coefficient de diffusion
μ : viscosité dynamique
α : coefficient de convection
β : Coefficient de dilatation
g : accélération de pesanteur
$\dot{m}$: débit massique
σ : tension superficielle
ΔT : variation de température

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

4. Similitude dans les équations différentielles aux dérivées partielles

Avant de procéder à l'analyse complète d'un écoulement, il convient tout d'abord de poser les hypothèses simplificatrices adéquates.

L'évaluation des différents coefficients sans dimension relatifs à l'écoulement (nombre de Reynolds *Re*, nombre de Strouhal *St*, nombre de Froude *FR*, etc.) va permettre en effet de simplifier les équations à résoudre.

Analysons ce que la composante verticale (selon l'axe z) de l'équation de Navier-Stokes, devienne après adimensionnalisation :

$$\rho.\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u.\frac{\partial w}{\partial x}+v.\frac{\partial w}{\partial y}+w.\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\rho.g$$

Introduisons le changement de variables suivant (sans dimension) :

$$\begin{cases} u^* = u/V \\ v^* = v/V \\ w^* = w/V \end{cases} \qquad \begin{cases} x^* = x/L \\ y^* = y/L \\ z^* = z/L \end{cases} \qquad \begin{cases} p^* = p/p_0 \\ t^* = t/\tau \end{cases}$$

où *L*, *V*, p_0 et τ sont des grandeurs caractéristiques du système étudié.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

Par extension, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{L}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x^*} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{L}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y^*} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{L}\cdot\dfrac{\partial}{\partial z^*} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \dfrac{1}{L^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{1}{L^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \dfrac{1}{L^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \end{cases} \qquad \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{1}{\tau}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t^*}$$

Ainsi, la composante verticale de l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\frac{\rho.V}{\tau}\cdot\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\rho.V^2}{L}\cdot\left(u^*.\frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^*.\frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^*.\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)$$

$$= -\frac{p_0}{L}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\mu.V}{L^2}\cdot\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right) - \rho.g$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

$$\frac{\rho.V}{\tau}.\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+\frac{\rho.V^2}{L}.\left(u^*.\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+v^*.\frac{\partial w^*}{\partial y^*}+w^*.\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)$$

$$=-\frac{p_0}{L}.\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\frac{\mu.V}{L^2}.\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right)-\rho.g$$

En divisant l'expression ci-dessus par le facteur $\frac{\rho.V^2}{L}$ **, on trouve :**

$$\frac{L}{V.\tau}.\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+u^*.\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+v^*.\frac{\partial w^*}{\partial y^*}+w^*.\frac{\partial w^*}{\partial z^*}$$

$$=-\frac{p_0}{\rho.V^2}.\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\frac{\mu}{\rho.V.L}.\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right)-\frac{g.L}{V^2}$$

$$St=\frac{\omega.L}{V}=\frac{L}{V.\tau}$$

$$Eu=\frac{\Delta p}{\rho.V^2}=\frac{p_0}{\rho.V^2}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho.V.L}{\mu}$$

$$Fr=\frac{V}{\sqrt{g.L}}$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

D'où la forme finale de l'équation aux dérivées partielles :

$$St.\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+u^*.\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+v^*.\frac{\partial w^*}{\partial y^*}+w^*.\frac{\partial w^*}{\partial z^*}$$

$$=-Eu.\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}}.\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right)-\frac{1}{Fr^2}$$

D'où la forme finale de l'équation aux dérivées partielles :

- Si ***St*** est très faible ➔ ***on peut négliger la dérivée instantanée et dans ce cas l'écoulement peut être considéré comme stationnaire***.
- Si ***Eu*** est très faible ➔ ***on peut négliger le gradient de pression***.
- Si ***Re*** est très grand ➔ ***on peut négliger la viscosité du fluide et l'assimiler à un fluide parfait (cas des très grandes vitesses d'écoulement)***.
- Si ***Fr*** est très grand ➔ ***on peut négliger les effets de la pesanteur***.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

5. Similitude dans les équations différentielles

Grâce au théorème de Vashy-Buckingham, l'analyse dimensionnelle permet de résumer le comportement d'un système à une relation entre un nombre restreint de grandeurs sans dimensions.

$$\pi_1 = \psi\left(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \ldots, \pi_{p-1}\right)$$

Pour des systèmes complexes, la détermination de la fonction ψ n'est pas accessible que par des *mesures expérimentales*. Ainsi, lors de la mise au point d'un prototype, il est économiquement et pratiquement pertinent de procéder à ces *mesures sur un modèle réduit* : c'est la *maquette*.

Il faut pouvoir *transposer les résultats obtenus sur la maquette* à ceux que l'on obtiendra sur le *prototype réel*.

Ainsi, on s'arrange pour respecter le maximum de similitudes entre la *maquette* et le *prototype*.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

À titre d'illustration, nous reprenons l'exemple de la force de traînée *T* exercée par un écoulement sur une plaque plane :

Maquette

$$\frac{T_m}{\rho_m.V_m^2.h_m^2} = \psi\left(\frac{L_m}{h_m}, \frac{\mu_m}{\rho_m.V_m.h_m}\right)$$

Prototype

$$\frac{T_p}{\rho_p.V_p^2.h_p^2} = \psi\left(\frac{L_p}{h_p}, \frac{\mu_p}{\rho_p.V_p.h_p}\right)$$

On commence tout d'abord par se fixer un facteur d'échelle : $\frac{L_m}{L_p} = \alpha = 1/25$

On respecte ensuite le facteur de forme : $\frac{L_m}{h_m} = \frac{L_p}{h_p}$

Si on utilise le même fluide, on a : $\rho_m = \rho_p$ **et** $\mu_m = \mu_p$

Respecter la similitude de Reynolds revient à écrire :

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p \Leftrightarrow \frac{\rho_m.V_m.h_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p.V_p.h_p}{\mu_p} \Leftrightarrow V_m.h_m = V_p.h_p \quad \Rightarrow \quad V_m = V_p.\frac{h_p}{h_m} = \frac{V_p}{\alpha}$$

Ainsi : $\frac{T_m}{\rho_m.V_m^2.h_m^2} = \frac{T_p}{\rho_p.V_p^2.h_p^2} \quad \Rightarrow \quad T_p = T_m.\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2.\left(\frac{h_p}{h_m}\right)^2$

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

$$T_p = T_m \cdot \left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2 \cdot \left(\frac{h_p}{h_m}\right)^2 \Rightarrow T_p = T_m$$

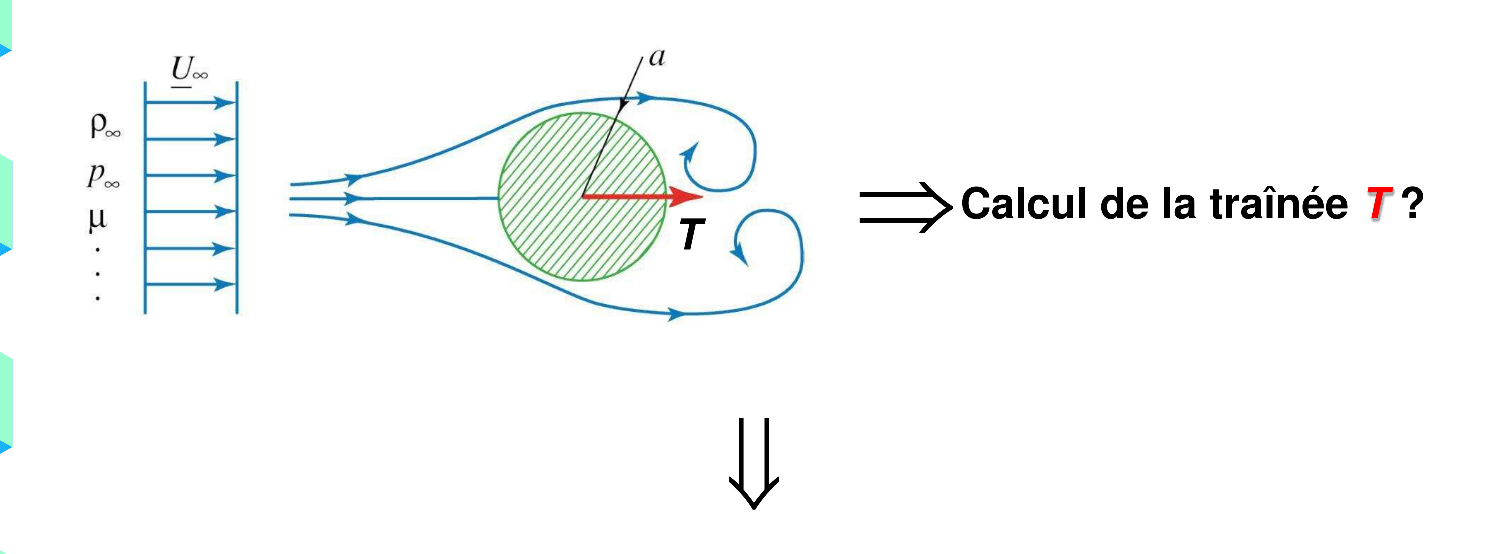
$$\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2 \rightarrow \alpha \qquad \left(\frac{h_p}{h_m}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{\alpha}$$

Ce résultat, ***spécifique au problème étudié***, montre que par un ***choix approprié de la vitesse***, la ***mesure expérimentale de la traînée sur une maquette géométriquement semblable*** donne directement la ***traînée à laquelle on doit s'attendre sur le prototype***.

En pratique, tout n'est pas simple, dans la mesure où l'***on ne peut pas souvent respecter simultanément toutes les similitudes***.

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

6. Approche expérimentale : *Maquettes (modèles réduits)*



Quels sont les paramètres adimensionnels à considérer expérimentalement ?

Comment garantir que les résultats obtenus sur une maquette soient représentatifs des objets réels ?

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE PHYSIQUE

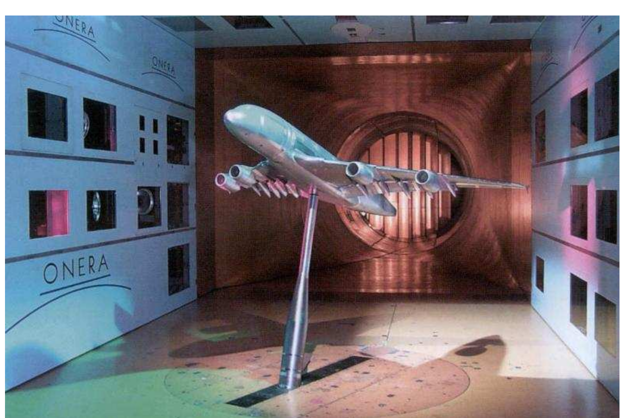
Exemples de modèles réduits



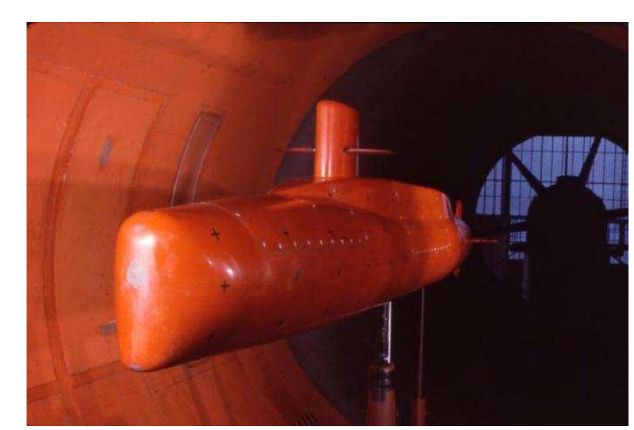
Prise d'eau centrale de Chinon (EDF)



Érosion d'un barrage (CNR)



Maquette de l'A380 (ONERA)



Maquette d'un sous marin (ONERA)

Chapitre 7

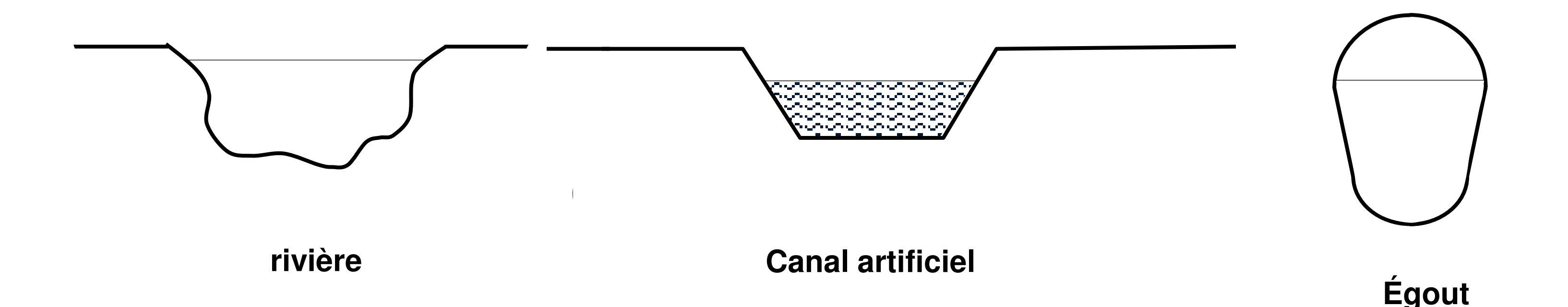
Écoulements dans les canaux découverts

Chapitre VII

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

1. Introduction

Il s'agit ici des écoulements pour lesquels il existe une ***surface libre*** soumise généralement à la ***pression atmosphérique***. Les ***canaux*** en question peuvent être constitués aussi par les ***fleuves***, ***rivières*** et ***canaux artificiels*** (par conséquent à ciel ouvert), que par ***certaines conduites fermées*** (***tunnels***, ***égouts***, ***etc.***) parcourues par des liquides n'occupant pas toute la section.



ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

L'écoulement dans les canaux est généralement produit par ***effet de la gravité***, mais le ***mécanisme est plus compliqué que dans le cas des conduites en charge***. Car la ***forme de la surface libre*** qui limite le domaine occupé par le fluide (liquide) est ***généralement inconnue***.

Dans la pratique, les ***écoulements sont rarement laminaires***. La ***turbulence se manifeste dès que le nombre de Reynolds dépasse la valeur de 2000 à 3000***. Par ailleurs, le fluide qui s'écoule est habituellement de l'eau, et la plupart des mesures expérimentales existantes ont été effectuées avec ce liquide.

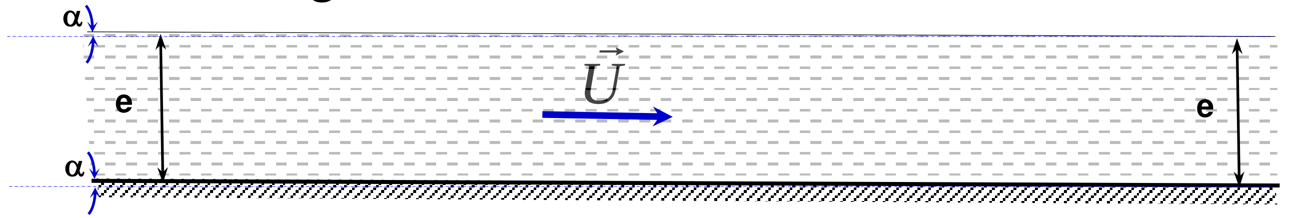
ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

2. Écoulement permanent en moyenne

2.1. Écoulements uniformes

2.1.1. Définition

L'écoulement dans un canal est considéré comme *uniforme quand l'épaisseur du liquide le long de l'écoulement reste constante*. Le plan de la surface libre est un plan incliné (d'angle α) parallèle aux génératrices, comme le montre la figure ci-dessous.



Quand on coupe le canal par un plan *perpendiculaire aux génératrices*, la section correspondant au volume occupé par le liquide est appelée *section mouillée* du canal *S*. Le périmètre qui suit les parois solides du canal en contact avec le liquide est appelé *périmètre mouillé P_r*.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

On définit le *rayon hydraulique* du canal par le rapport : $R_H = \frac{S}{P_r}$

Le *diamètre hydraulique* est donné par : $D_H = 4.R_H$

Si on désigne par Q_v le *débit volumique* du fluide à travers le canal, la vitesse débitante U s'écrit :

$$U = \frac{Q_v}{S}$$

Le *nombre de Reynolds Re* qui sert à caractériser l'écoulement à surface libre à travers le canal est :

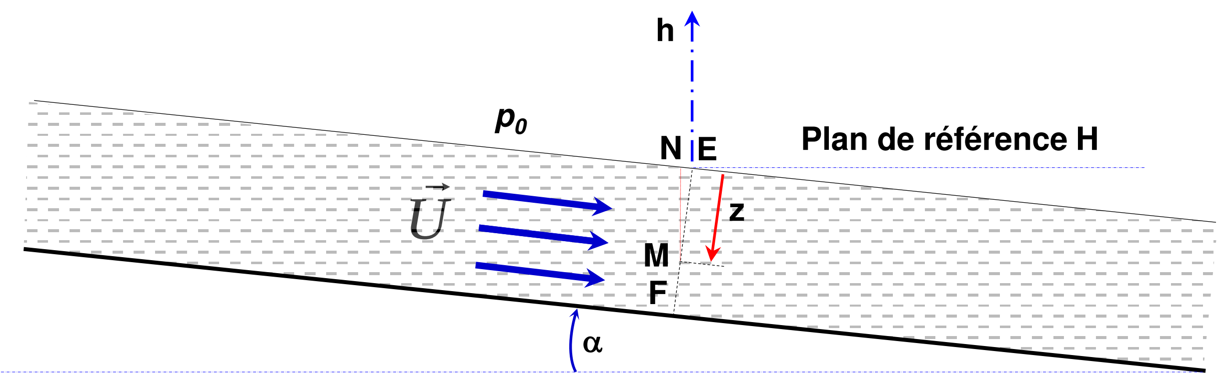
$$Re = \frac{4.U.R_H}{\nu} = \frac{U.D_H}{\nu}$$

Si α est l'angle formé par les génératrices du canal avec l'horizontale, la pente de ce dernier est définie alors par *a=tg(α)*.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

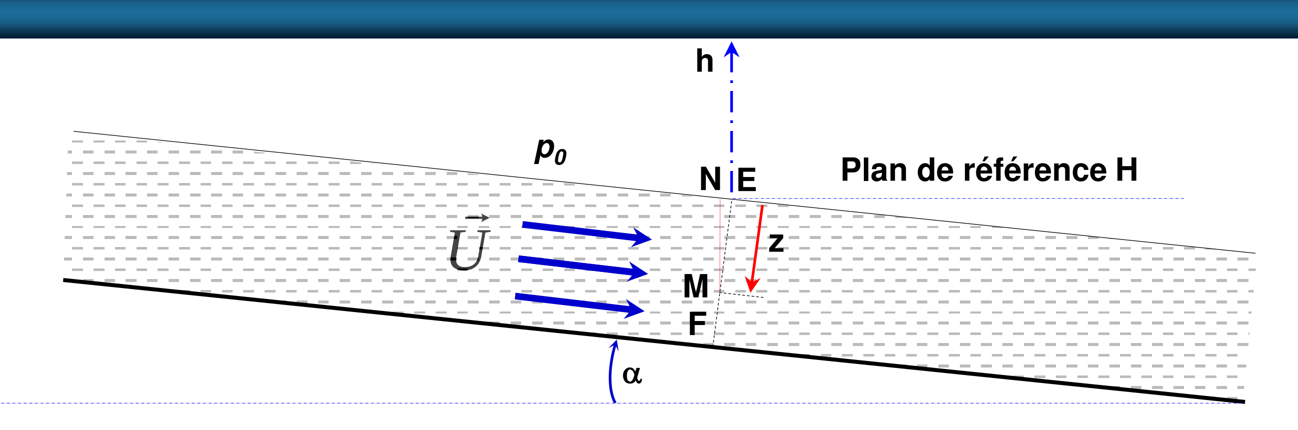
2.1.2. Cas des canaux en charge

Si le canal est *infiniment large*, la *vitesse est partout parallèle aux génératrices* de celui-ci.



En première approximation, nous admettrons que la *vitesse longitudinale est constante et égale à U*. De même, nous pouvons admettre aussi que les *lignes de courant sont sensiblement rectilignes et parallèles aux génératrices du canal*. Ainsi, la *répartition de la pression est alors hydrostatique dans une section droite du canal*.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS



Le plan de référence étant le plan horizontal *H* passant par le point *E*. En un point *M* quelconque, on a :

$$p + \rho.g.h = Cte = p_0$$

En prenant la pression atmosphérique p_0 comme origine des pressions, et en comptant *z* positivement vers le bas (*h = -z.cos(α)*), on a :

$$p = \rho.g.z.cos(\alpha)$$

Pour les canaux usuels, l'angle α est toujours très faible, et par conséquent *cos(α) ≈ 1*. D'où : $p = \rho.g.z$. Cette *expression est analogue* à celle que l'on trouve pour un *fluide au repos*.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Sur un élément de surface *dS* de la paroi solide du canal en contact avec le liquide, le fluide exerce la *force de frottement* $\tau_0.dS$ qui varie avec la position de l'élément considéré. Si τ_{0m} est la *valeur moyenne* de τ_0 *sur la* surface mouillée, l'ensemble des forces de frottement s'exerçant sur une longueur *L* du canal est égal à $\tau_{0m}.P_r.L$.

Les quantités τ_{0m} et τ_0 sont fonctions des *conditions d'écoulement et de la nature de paroi* (rugosité). Et comme pour le cas des conduites, on peut poser :

$$\tau_{0m} = C_f.\rho.\frac{U^2}{2}$$

Les variations de C_f sont *analogues à celles dans les conduites*. C_f n'est fonction que du nombre de Reynolds *Re* et de la viscosité du fluide *µ* (pour les régimes turbulents).

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Pour un écoulement permanent et uniforme, la *relation* liant les *forces de frottement aux parois* sur une longueur *L* et les *forces de gravité* s'écrit :

$$\tau_{0m}.P_r.L = C_f.\rho.\frac{U^2}{2}.P_r.L = \rho.g.S.L.sin(\alpha)$$

Comme l'angle α est très faible, on peut alors remplacer *sin(α)* par *tg(α)=i* où *i* est est la pente du canal, et on obtient la relation suivante :

$$U = \sqrt{\frac{2.g}{C_f}}.\sqrt{R_H.i} = C.\sqrt{R_H.i} = C.\sqrt{\frac{D_H}{4}.i} = C.\sqrt{\frac{S}{P_r}.i}$$

Cette expression est connue sous le nom de *formule de Chézy*, où *C* est le *coefficient de Chézy* (dimensions $L^{1/2}.T^{-1}$) défini par :

$$C = \sqrt{\frac{2.g}{C_f}}$$

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

2.1.3. Calcul du coefficient de Chezy : Formule de Bazin

Le coefficient de frottement peut être exprimé en fonction du coefficient de perte de charge linéaire λ (dépendant du nombre de Reynolds *Re* et de la rugosité des parois lorsque *Re > 3000*) par :

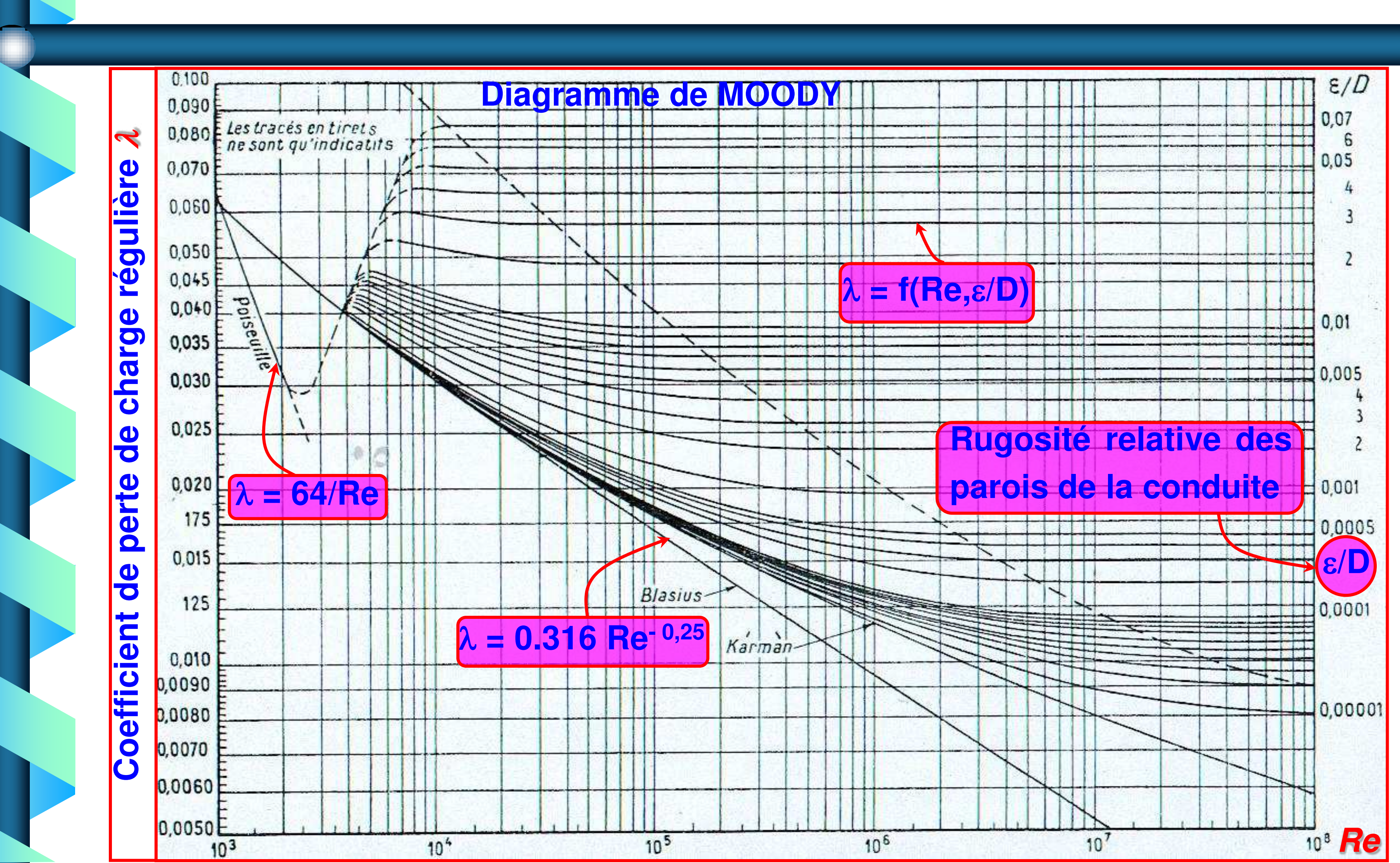
$$C_f = \frac{\lambda}{4}$$

D'où le coefficient de Chézy, devient :

$$C = \sqrt{\frac{2.g}{C_f}} = \sqrt{\frac{8.g}{\lambda}}$$

Cette relation est ***assez bien vérifiée par l'expérience tant que la largeur du canal n'est pas trop grande par rapport à sa profondeur*****.**

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS



ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

D'autres formules, d'origine empirique, ont été proposées pour le calcul de *C*. Parmi ces dernières, la formule de Bazin (ci-dessous) est couramment utilisée (surtout en France), où le coefficient *C* est exprimé en $m^{1/2}.s^{-1}$.

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_H}}}$$

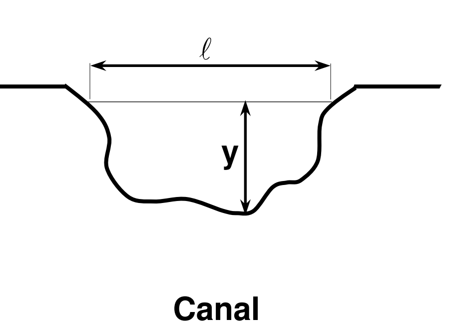
Le coefficient γ prend les valeurs suivantes :

- $\gamma = 0{,}06$ pour des parois très unies : ciment lissé, bois raboté
- $\gamma = 0{,}16$ pour des parois très unies : planche, brique, pièrres de taille
- $\gamma = 0{,}46$ pour des parois en maçonnerie de moellons
- $\gamma = 0{,}85$ pour des parois en terre régulière
- $\gamma = 1{,}30$ pour des parois en terre ordinaire
- $\gamma = 1{,}75$ pour des parois herbées, des fonds de galets.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

2.1.4. Débitance d'un canal

La détermination du *débit d'un canal de forme géométrique quelconque et de nature de parois donnée*, est un problème important dans la pratique. Elle s'effectue aisément si on connait la *section droite mouilée* du canal *S* et la *vitesse débitante U*.



Canal

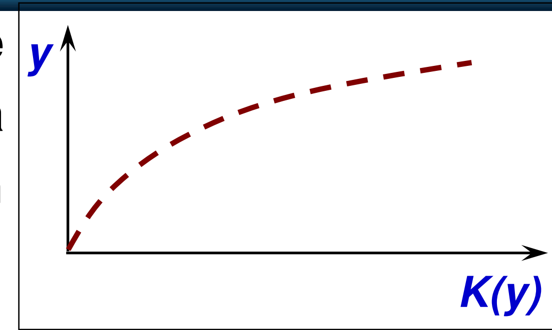
Mais comme la section *S* et le périmètre mouillé P_r dépendent de la profondeur *y* du liquide dans le canal, le *coefficient de Chézy C*, qui ne dépend que de R_H, va dépendre aussi uniquement de *y*. Ainsi, le débit volumique Q_v, sécrit alors sous la forme :

$$Q_v = S.C.\sqrt{R_H}.\sqrt{i} = K.\sqrt{i}$$

où $K = S.C.\sqrt{R_H}$ est une fonction de *y* appelée *débitance du canal*.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Si on examine l'évolution de ***K(y)*** en fonction de la hauteur ***y***, on obtient la courbe ci-joint. La quantité $Q_v / \sqrt{i}$ est tout simplement l'expression de ***K(y)***.



Les vitesses qu'on peut admettre dans un canal ne peuvent être quelconques à cause des risques d'érosion des parois. Elle atteignent ***0,20 m/s*** pour les terres argileuses, ***1 m/s*** pour les graviers et ***4*** à ***5 m/s*** pour les roches dures.

Les cours d'eau natuels ont généralement un lit assez inégal qui rend parfois assez difficile l'application des formules établies précédemment. Cependant, on peut souvent assimiler leur section à un rectangle de largeur ***l***, assez grande devant la profondeur ***y***. Dans ce cas, ***S=l.y***, et ***S/P_r=y.l/(l+2y) # y***, et on obient :

$$R_H = \frac{l.y}{l+2y} \approx y$$

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

2.2. Ecoulements graduellement variés

2.2.1. Définition

On dit qu'un écoulement est *graduelement varié* si la *pente de la surface libre et celle du canal*, ainsi que la forme de la section transversale, *varient suffisamment lentement* pour qu'on puisse admettre que l'écoulement ait un *caractère régulier assez proche du régime uniforme le long d'un petit trançon*. En première approximation, on peut admettre que dans une même section droite, la *vitesse est constante*, et égale à la vitesse débitante ($U=Q_V/S$), et que la *répartition des pressions est hydrostatique*.

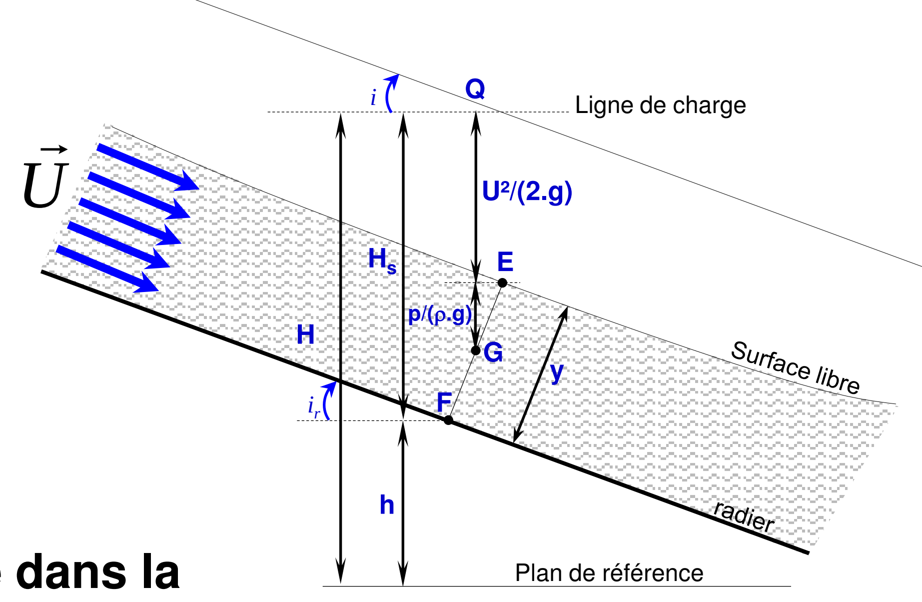
Lorsqu'on *barre*, par exemple, un canal en écoulement uniforme par un barrage sulélevant le niveau en une section, *l'effet s'en fait ressentir loin en amont et se manifeste par des variations de la profondeur d'eau et la pente de la surface libre*. La *variation de celle-ci par rapport à celle qu'on avait en régime uniforme* s'appelle le *remous*.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

2.2.2. Charge spécifique

Lorsque la pente du canal est faible, la ligne piézométrique est pratiquement confondue avec la surface libre. La ligne de charge est toujours descendante (dans le sens de l'écoulement).

Si on se réfère au canal et non pas à un plan horizontal de référence (arbitraire), la cote de la ligne de charge par rapport au fond F du canal est :



$$H_s = y + \frac{U^2}{2.g}$$

H_s est appelée charge spécifique dans la section. C'est une quantité généralement différente de la charge H, mais elle peut servir à *caractériser l'énergie totale du liquide*.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

2.2.3. Nombre de Froude

Le *nombre de Froude* (de l'hydrodynamicien anglais *William Froude*), est un *nombre adimensionnel* qui caractérise dans un fluide l'importance relative des *forces liées à la vitesse* et à la *force de pesanteur*. Ce nombre apparaît essentiellement dans les phénomènes à surface libre, en particulier dans les études de cours d'eau, de barrages, de ports et de navires (architecture navale).

En dynamique des fluides il fait partie des trois nombres sans dimension les plus utilisés (*Re*, *M* et *Fr*). Il caractérise l'importance de la pesanteur, alors que le nombre de Reynolds *Re* prend en compte la viscosité et le nombre de Mach *M* la compressibilité. Ce nombre est défini par :

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{g.h}}$$

où *U* est la vitesse de l'écoulement, *g* est l'accélération de la pesanteur (*9,81 m.s*$^{-2}$) et *h* est la hauteur d'eau.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Pour un *cours d'eau donné*, *un même débit peut être obtenu de deux façons différentes* :

- ***Si Fr < 1*** : Le régime de l'écoulement est dit "*fluvial*", avec une forte hauteur d'eau et une faible vitesse (équivalent d'un écoulement subsonique). Ce régime est "*piloté par l'aval*" : le comportement des particules en mouvement est contraint par celles qui les précèdent.

- ***Si Fr > 1*** : Le régime de l'écoulement est dit "*torrentiel*", avec une faible hauteur d'eau et une forte vitesse (équivalent d'un régime supersonique). Dans ce régime, le fluide est "*tiré*" par les forces qui le meuvent (la gravité le plus souvent), sans que la masse de fluide en aval soit une gène.

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{g.h}}$$

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Dans les deux solutions (*Fr < 1* et *Fr > 1*), la *hauteur d'eau* et la *vitesse* sont déterminées suivant le *nombre de Froude* et le *débit*. Mais les *solutions ne se calculent pas de la même façon*. La *détermination du nombre de Froude est donc un préalable au calcul*.

La *transition du régime torrentiel* au *régime fluvial* provoque *un ressaut hydraulique* où la hauteur d'eau *s'accroit brusquement*.





ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

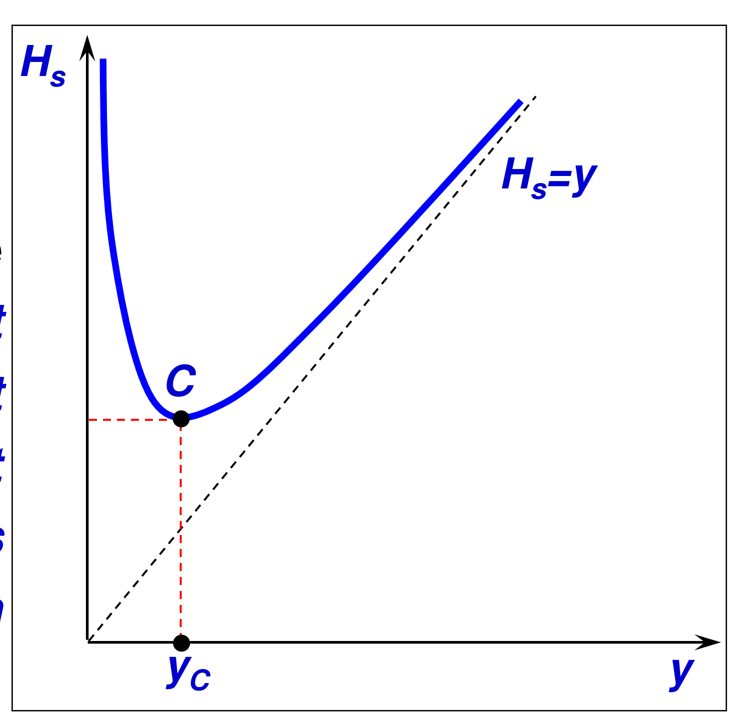
2.2.4. Ecoulement à débit Q_v constant, y étant variable

La cote du fond *étant donnée*, il est plus simple d'étudier la charge comptée à partir du fond, c'est ce que nous l'avons appelée la ***charge spécifique H_s***.

Cherchons ***comment varie H_s*** quand, dans un canal, s'écoule un débit ***Q_v=S.U*** constant :

$$H_s = \underbrace{y}_{EP} + \underbrace{\frac{Q_v^2}{2.g.S^2}}_{EC}$$

S est une fonction de ***y***, qui varie dans le même sens que ***y***. Quand ***y est nulle***, ***S est nulle*** et ***Hs devient infinie***. Quand ***y est infinie***, ***S l'est aussi***, mais ***H_s l'est également***. Comme ***Hs possède des valeurs finies***, ses ***variations en fonction de y doivent passer par un minimum***.



ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Ce minimum de H_s est obtenu pour :

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q_v^2}{2.g.S^2}\right) = 1 - \frac{Q_v^2}{g.S^3}\cdot\frac{dS}{dy} = 0$$

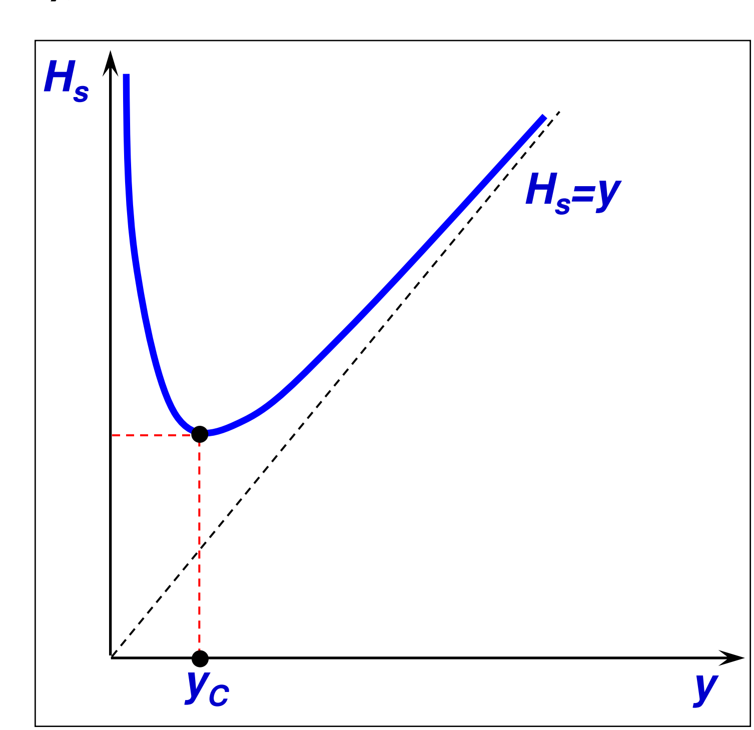
Comme $dS/dy = l$ (largeur de la surface libre), donc :

$$\frac{Q_v^2}{g.S^3}\cdot\frac{dS}{dy} = \frac{Q_v^2.l}{g.S^3}$$

Soit, d'après la *minimisation de dH_s/dy* :

$$\frac{Q_v^2.l}{g.S^3} = 1$$

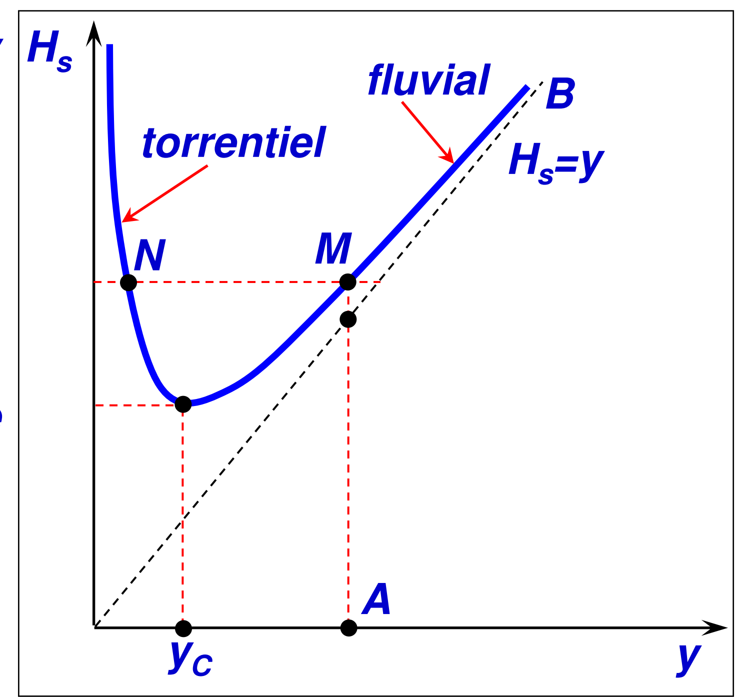
La valeur de y correspondante est appelée *profondeur critique y_c*. Elle se rapporte à la section critique S_c.



ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Ainsi, à toute valeur suffisante de H_s, correspond donc deux valeurs de y, l'une en M ($y > y_c$) pour laquelle *le régime est fluvial*, l'autre en N ($y < y_c$) pour laquelle *le régime est torrentiel*.

En régime permanent, le même débit Q_v peut donc s'écouler dans un canal de deux manières différentes, tout en ayant la même énergie totale :



- ***Régime fulvial*** *: la vitesse est faible mais la profondeur de l'eau est grande,*
- ***Régime torrentiel*** *: La vitesse est forte, mais la profondeur de l'eau est faible.*

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Relation entre dH_s/dy et le nombre de Froude Fr :

On a :

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q_v^2}{2.g.S^2}\right) = 1 - \frac{Q_v^2}{g.S^3}.\frac{dS}{dy} = 1 - \frac{Q_v^2.l}{g.S^3}$$

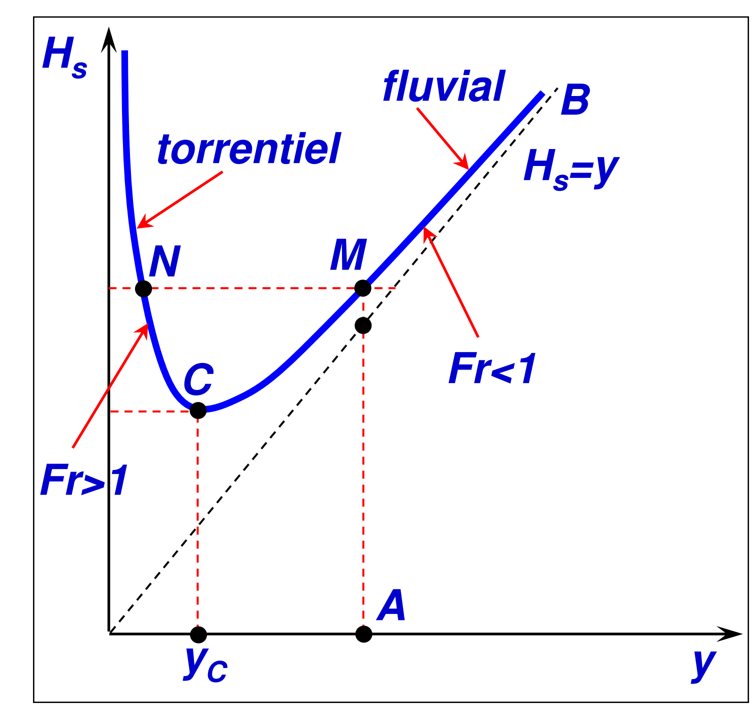
ou bien :

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - \frac{Q_v^2.l}{g.S^3} = 1 - \left(\frac{Q_v}{S}\right)^2.\left(\frac{l}{g.S}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{Q_v}{S}\right)^2.\left(\frac{l}{g.y.l}\right) = 1 - \frac{U^2}{g.y}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{dH_s}{dy} = 1 - Fr^2}$$



ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

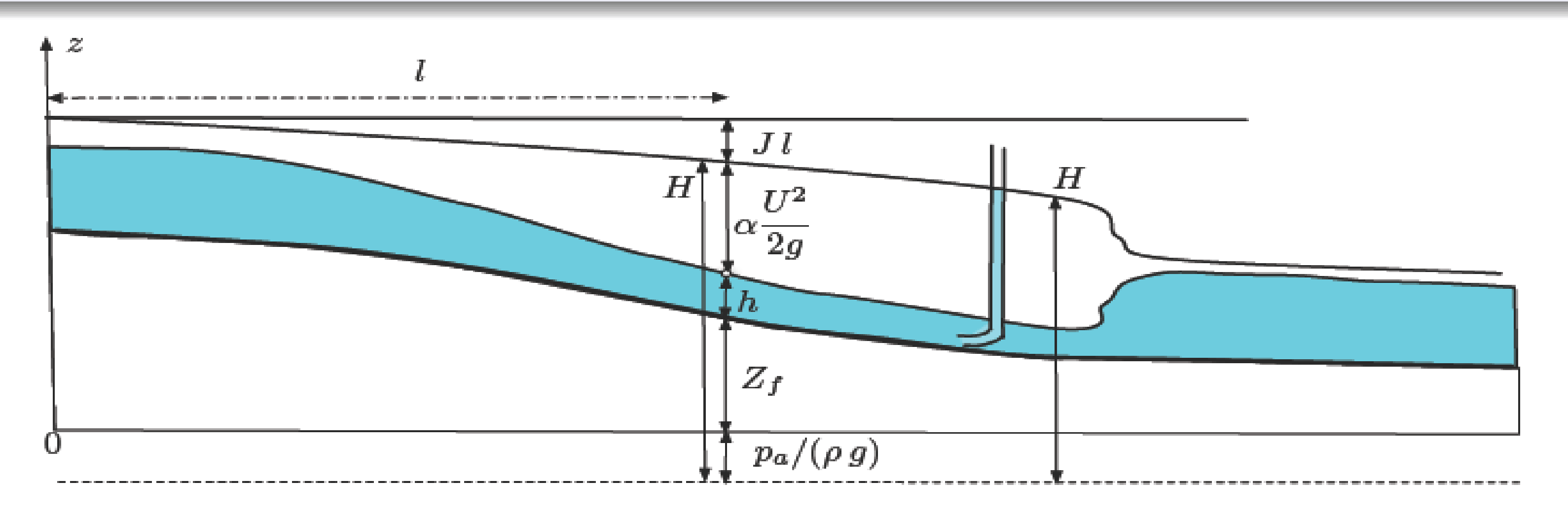
3. Etude de la charge hydraulique en écoulement turbulent

La charge hydraulique est définie à partir des *équations de Naviers-Stokes turbulentes*. On moyenne ensuite cette charge sur la section d'un écoulement à surface libre dans un canal.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Charge hydraulique des écoulements à surface libre :

$$H(s) = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) + h(s) + \alpha(s)\frac{U^2(s)}{2g}$$



Perte de charge linéique $\frac{dH}{ds} = -J$:

$$H(s_2) - H(s_1) = -\int_{s_1}^{s_2} J(s)\, ds \quad \text{avec} \quad J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \underline{J} \cdot \underline{e}_s \, da$$

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

4. Ressauts hydrauliques

Le tracé de la charge spécifique permet de décrire l'écoulement stationnaire sur un obstacle d'extension finie et de faible pente. Le tracé de l'impulsion permet de décrire les ressauts stationnaires.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

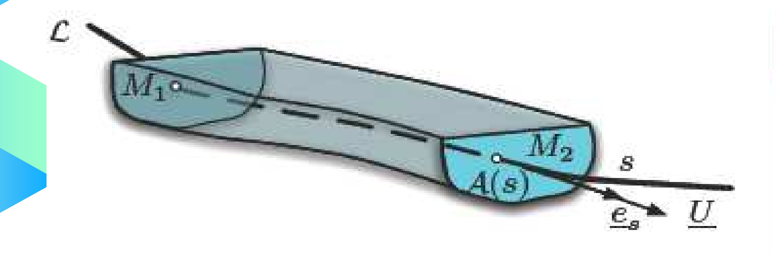
Équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds :

$$\text{div}\ \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}\ \underline{U} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}}\ p + \nu\, \Delta \underline{U} - \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}\ \underline{U} = \frac{1}{2}\, \underline{\text{grad}}\ \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}}\ \underline{U} \wedge \underline{U} \qquad \text{et} \qquad \underline{F} = -\underline{\text{grad}}\ (g\, z)$$

$$\int_{\mathcal{L}} \underline{\text{grad}}\ H \cdot \underline{dM} = \frac{1}{g} \int_{\mathcal{L}} \left(-\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nu\, \Delta \underline{U} - \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{R}} \right) \cdot \underline{dM}$$

$$\text{avec} \qquad R_{ij} = \overline{U_i'\, U_j'} \qquad \text{et} \qquad H = \frac{p}{\rho\, g} + z + \frac{1}{2\, g} \underline{U}^2$$



Integration de M_1 à M_2

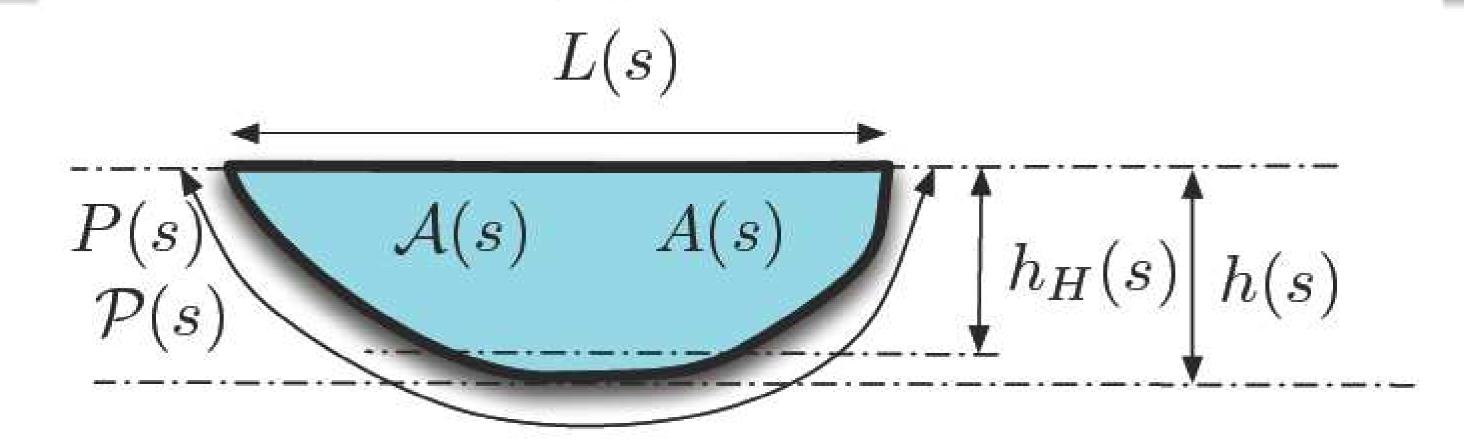
$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{J} \right) \cdot \underline{dM}$$

$$\text{avec} \qquad \underline{J} = \frac{1}{g}(-\nu\, \Delta \underline{U} + \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{R}})$$

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

- Section : A
- Périmètre mouillé : P
- Largeur mirroir : L

- Rayon hydraulique : $R_H = A/P$
- Diamètre hydraulique : $D_H = 4\ R_H$
- Hauteur hydraulique : $h_H = A/L$

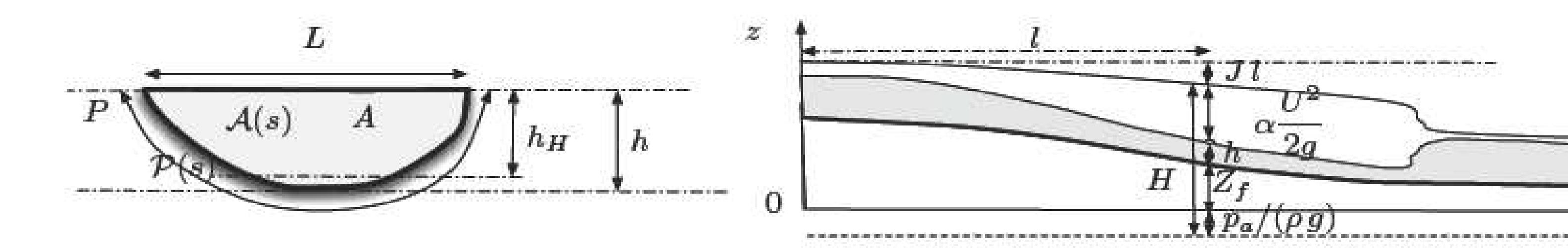


- On suppose souvent $h_H \sim h$
- Section rectangulaire avec $L \gg h$: $R_H \sim h$
- Section en demi-cercle de rayon R : $R_H = R/2$

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Équations d'équilibre avec $\alpha \sim 1$:

$$\frac{dQ}{ds} = 0 \quad \text{avec} \quad Q = U\,A\,, \quad \frac{dH}{ds} = -J \quad \text{avec} \quad H = \frac{p_a}{\rho\,g} + h + Z_f + \frac{U^2}{2g}$$



Pente $I = -dZ_f/ds$:

$$\frac{d(U\,A)}{ds} = \frac{dU}{ds} A + U\,\frac{dA}{dh}\,\frac{dh}{ds} = 0$$

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dh}{ds} - I + \frac{U}{g}\,\frac{dU}{ds} = -J$$

Si $dA \sim L\,dh$ et $A/L = h_L \sim h$:

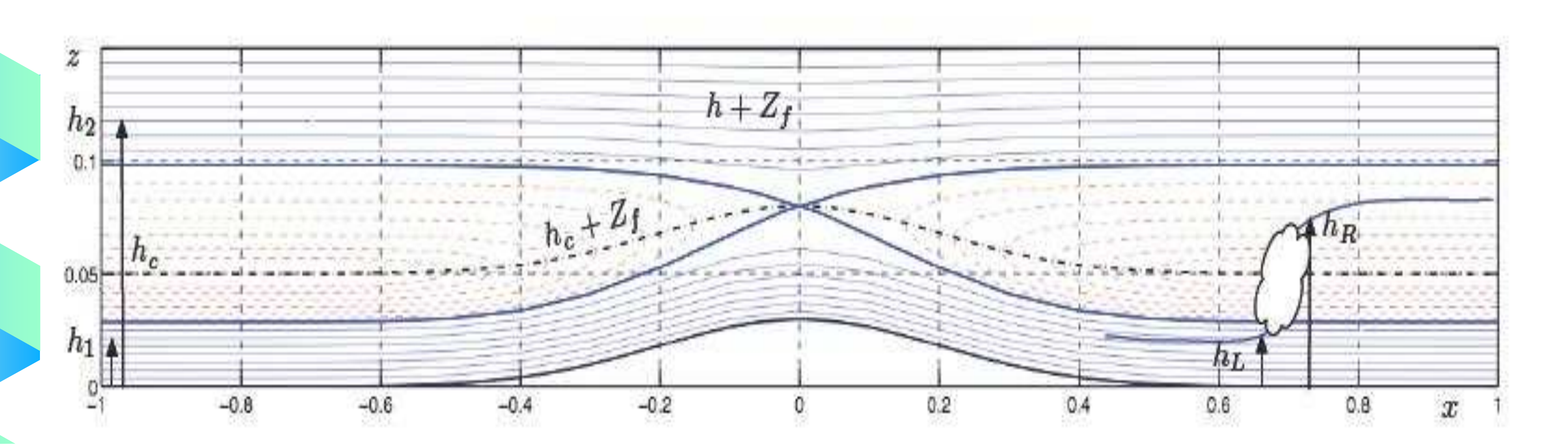
$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2}$$

où le nombre de Froude est

$$Fr = U/\sqrt{g\,h}$$

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS





ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Hauteur critique h_c dans le cas L constante et $A/L = h_H \sim h$:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g\,h}} = \left(\frac{h_c}{h}\right)^{3/2} \quad \text{avec} \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \quad \text{et} \quad q = U\,h$$

Obstacle $z = Z_f(s)$ dans le cas $J \sim 0$ (frottements négligeables) :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I}{1 - Fr^2} = \frac{-dZ_f/ds}{1 - (h/h_c)^{-3}} \quad \Longrightarrow \quad h + \frac{1}{2}\frac{h_c^3}{h^2} = H_0 - Z_f$$

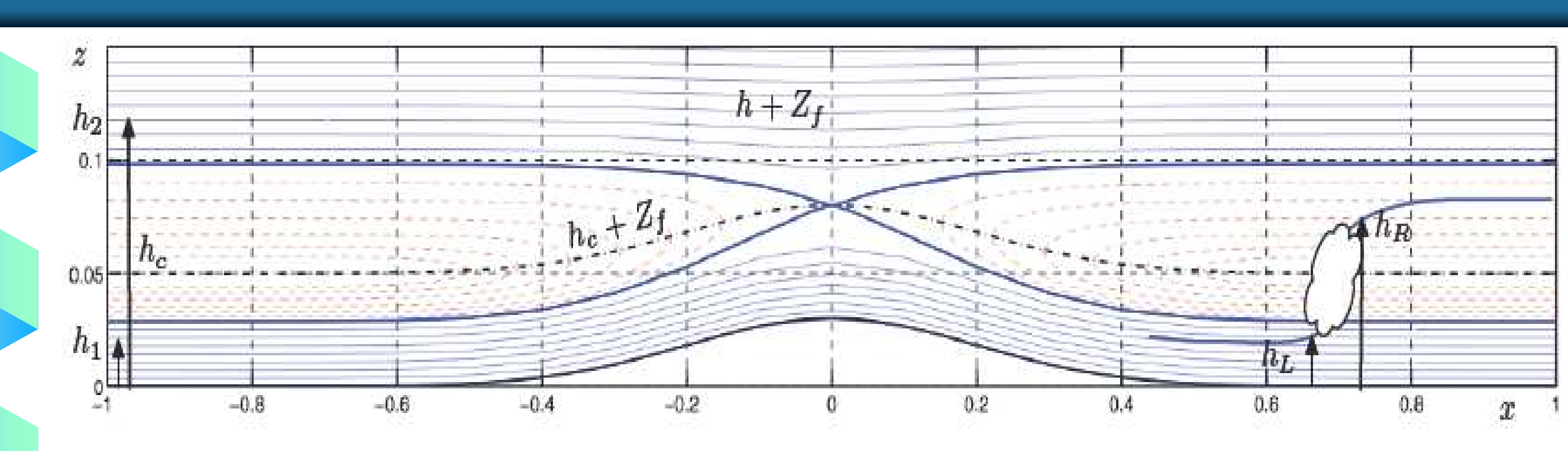
Charge spécifique $\mathcal{E}(q,h)$ et conservation de la charge H :

$$\mathcal{E}(q,h) = h + \frac{q^2}{2\,g\,h^2} = h + \frac{U^2}{2\,g} = h + \frac{1}{2}\frac{h_c^3}{h^2}$$

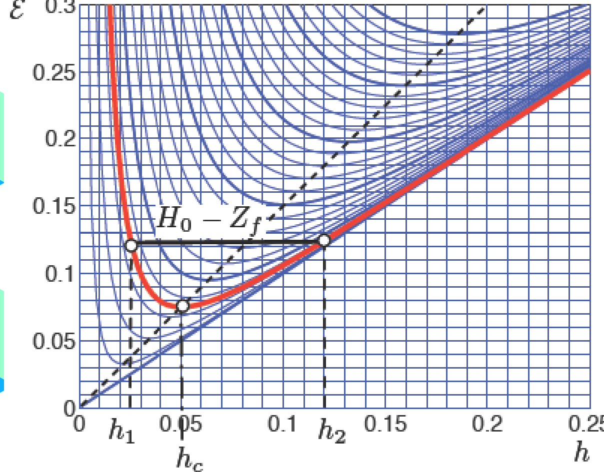
On a donc : $\mathcal{E}[q, h(s)] = H_0 - Z_f(s)$

$$H = \frac{p_a}{\rho\,g} + Z_f(s) + h(s) + \frac{U(s)^2}{2\,g} \quad \Longrightarrow \quad H_0 = H - \frac{p_a}{\rho\,g}$$

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS



Solutions de $\mathcal{E}[q, h(s)] = H_0 - Z_f(s)$



Écoulement critique : $Fr = 1$:

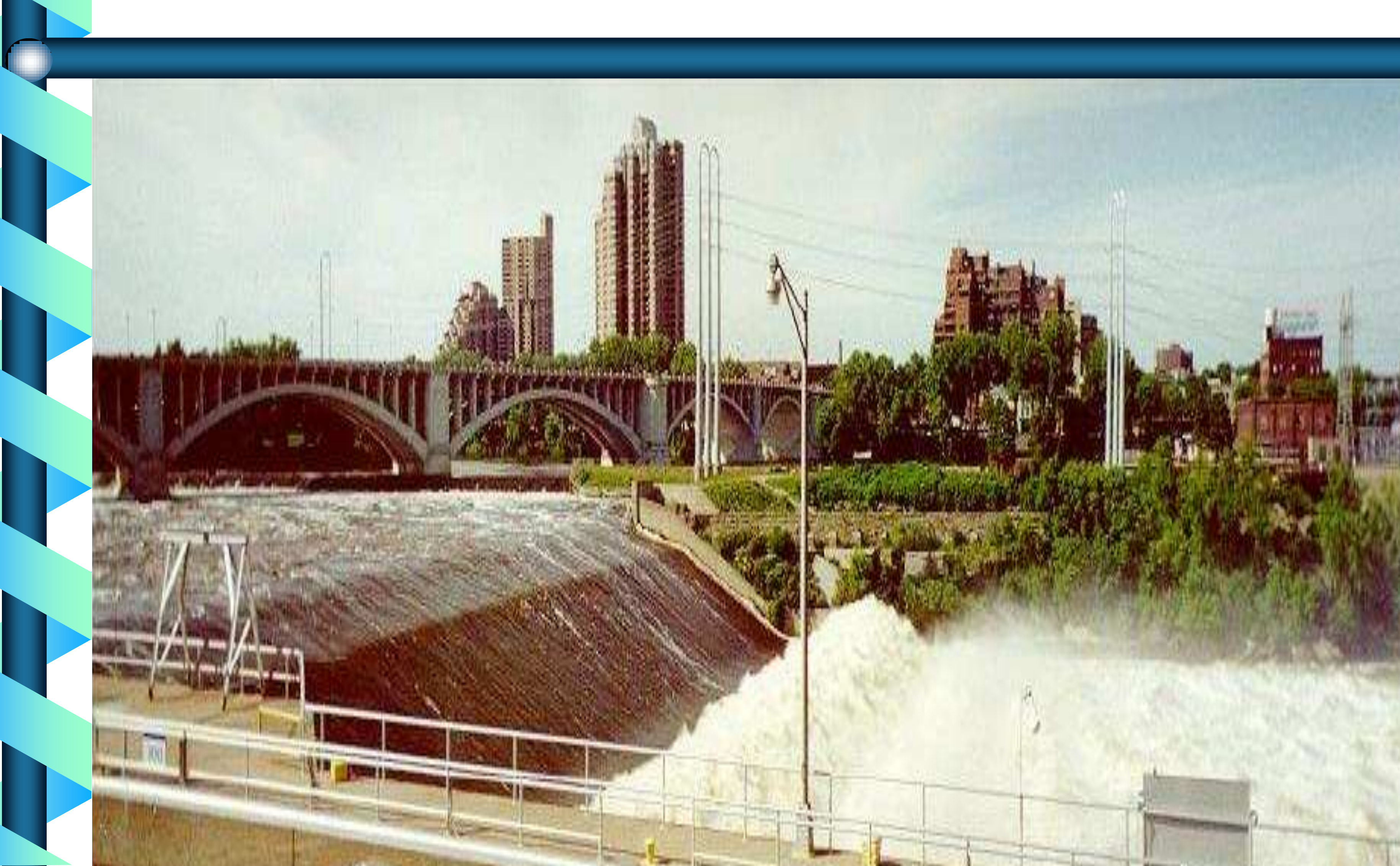
- Sous critique :
  $h > h_c \iff Fr < 1$
- Super critique :
  $h < h_c \iff Fr > 1$

h_1 et h_2 sont des hauteurs conjugées pour $\mathcal{E}(q, h)$

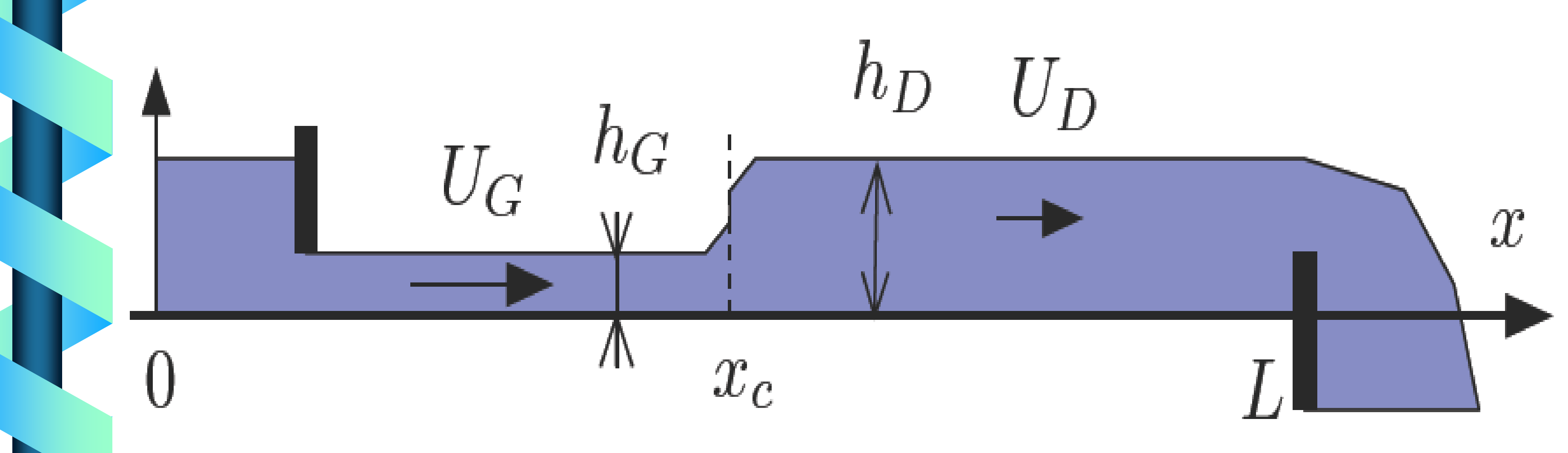
ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS



ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS



ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS



ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

5. Courbes de remous

Pour obtenir des courbes, on paramétrise le frottement, qui est proportionnel à la perte de charge, à l'aide d'un *coefficient de Strickler*, et on trace les courbes de remous des écoulements stationnaires.

La rugosité du canal intervient donc dans le calcul du coefficient de Chézy *C*, grâce à la loi de Manning-Strickler :

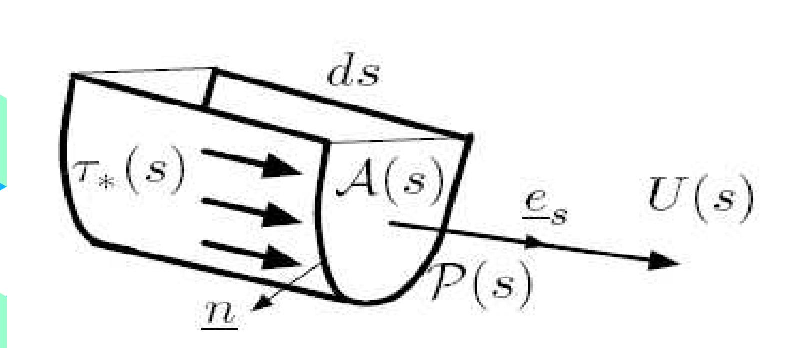
$$C = K.R_H^{1/6}$$

où K est appelé le coefficient de Manning-Strickler.

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Équations de Navier-Stokes turbulentes et perte de charge :

$$\underline{J} = \frac{1}{g}(-\nu\,\Delta\underline{U} + \text{div}\,\underline{\underline{R}}) = -\frac{1}{\rho\,g}\,\text{div}\,(\underline{\underline{\tau}}_t) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\tau}}_t = \rho\,(2\,\nu\,\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{R}})$$



$$J = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{A}} \underline{J}\cdot\underline{e}_s\,da$$

$$\tau_* = -\frac{1}{P}\int_{\mathcal{P}} \underline{e}_s\cdot\underline{\underline{\tau}}_t\cdot\underline{n}\,dl$$

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial s}\left(\underline{e}_s\cdot\underline{\underline{\tau}}_t\cdot\underline{e}_s\right)\,da \sim 0$$

Relation entre la perte de charge linéique J et le frottement τ_* :

$$\tau_* = \rho\,g\,R_H\,J \qquad \text{avec} \qquad R_H = A/P$$

ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Paramétrisation du frottement $\tau_* = \rho\, g\, R_H\, J$:

$$\tau_* = \frac{1}{8}\,\lambda(Re, Ru)\,\rho\,U^2 \quad \Longleftrightarrow \quad J = \lambda(Re, Ru)\,\frac{U^2}{2\,g\,D_H}$$

avec $Re = U\,D_H/\nu$ et $Ru = k_s/D_H$

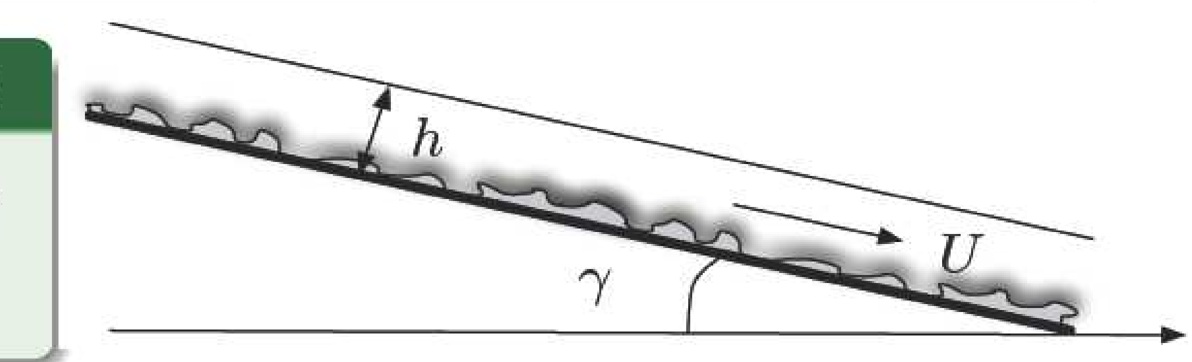
Paramétrisation de Manning-Strickler (cas rugueux) :

$$\lambda = \phi_{MS}\,Ru^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad J = \frac{U^2}{R_H^{4/3}\,K_s^2} \quad \text{avec} \quad K_s = \left(\frac{8\,k_s^{1/3}\,g}{\phi_{MS}}\right)^{1/2}$$

Si $I = -\frac{dZ_f}{ds} = \sin\gamma$:

$J = I$ et $R_H = h \Longrightarrow$

$$U = K_s\,h^{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\sin\gamma}$$



ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

Équation stationnaire pour h avec frottement J :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \qquad \text{avec} \qquad I = -\frac{dZ_f}{ds}$$

Hauteur critique h_c :

$$Fr^2 = \left(\frac{h_c}{h}\right)^2 \qquad \text{avec}$$

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

Hauteur normale h_n :

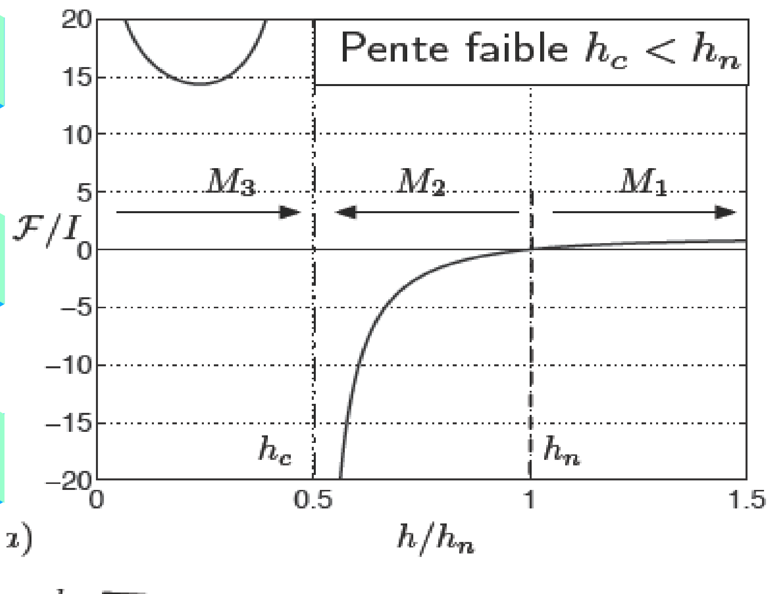
$$J = I\left(\frac{h}{h_n}\right)^{-10/3} \qquad \text{avec}$$

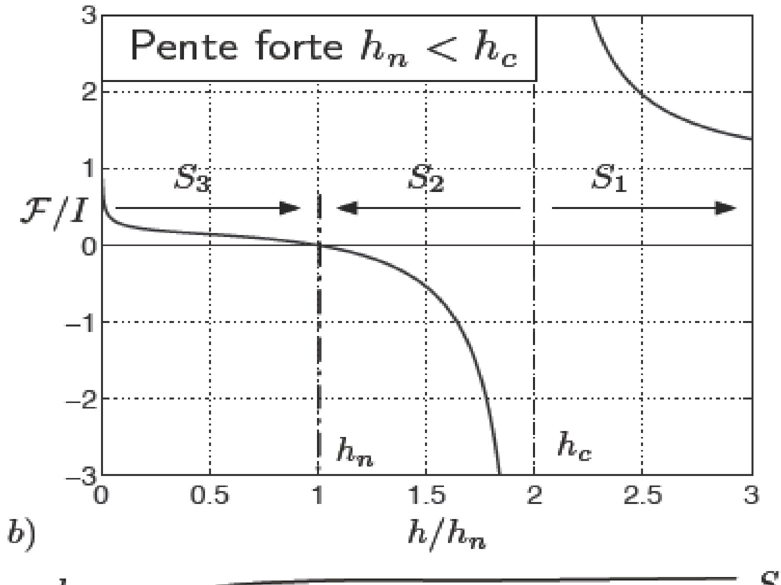
$$h_n = \left(\frac{q^2}{I\,K_s^2}\right)^{3/10}$$

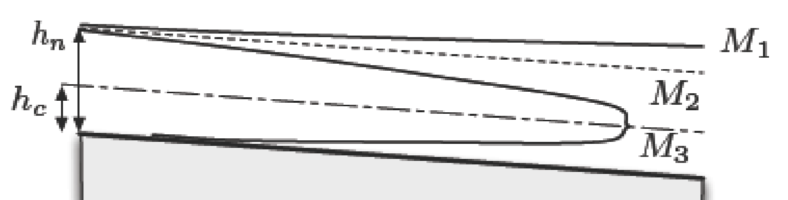
$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I\,\frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}}$$

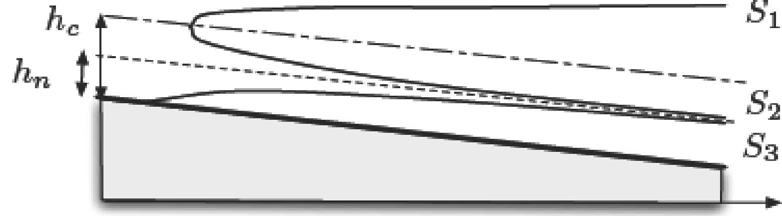
ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I \, \frac{1-(h/h_n)^{-10/3}}{1-(h/h_c)^{-3}}$$

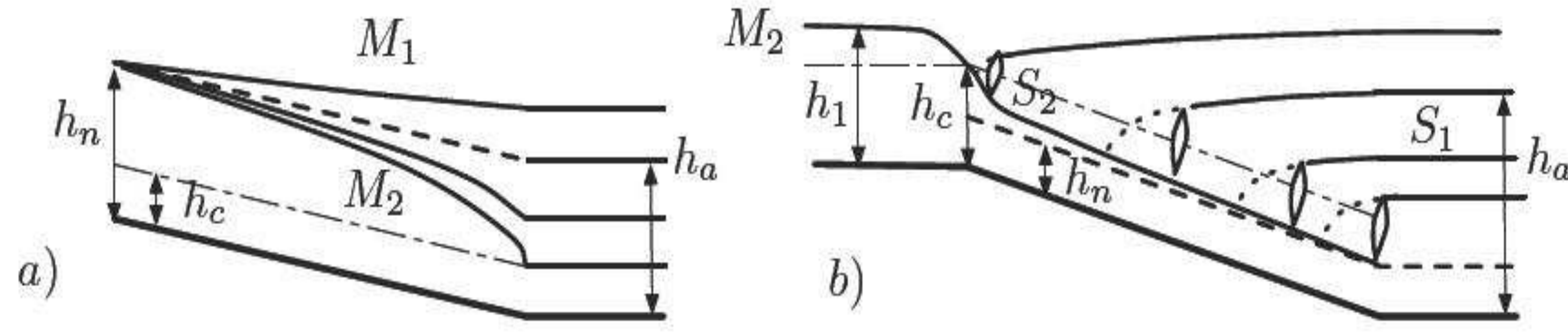








ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

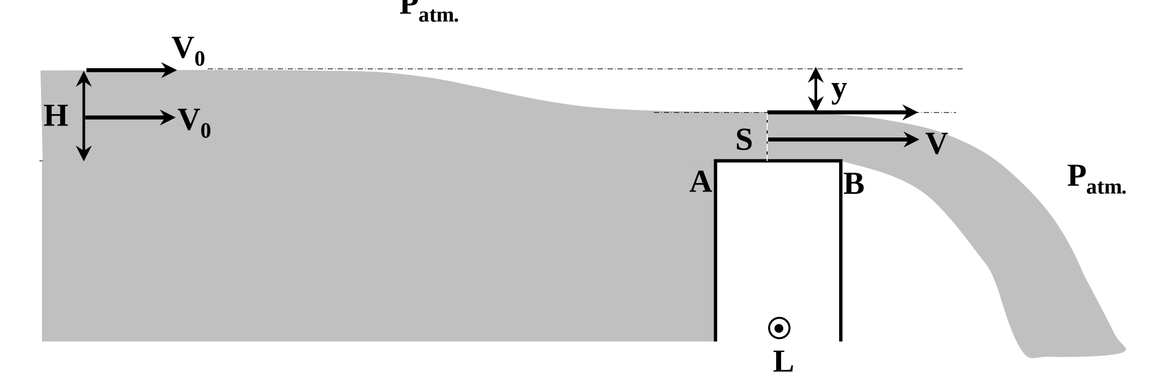


ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

6. Exercice d'application : *Etude d'un diversoir à seuil large*

Le seuil *AB* d'un déversoir de largeur *L* (perpendiculaire au plan de figure ci-dessous) est suffisamment long (*AB*) pour que la lame d'eau qui traverse la section *S* puisse être considérée comme constituée de filets parallèles horizontaux s'écoulant à vitesse uniforme. La pression atmosphérique p_{atm} est également considérée comme uniforme.

1) **Calculer en fonction de la baisse de niveau *y* le débit qui traverse la section *S*.**
2) **Pour quelle valeur de *y* le débit est-il maximum ?**
3) **Exprimer ce débit maximum si la vitesse V_0 est négligeable.**



Chapitre 7

Ecoulements rampants laminaires et lubrification hydrodynamique

Chapitre VII

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

1. Introduction

Un fuide newtonien incompressible est dit en *écoulement de Stokes* ou en *écoulement rampant*, si l'on peut negliger les *termes inertiels* dans l'equation de *Navier-Stokes* devant le *terme visqueux diffusif*. Le terme *non linéaire* (dit aussi « *convectif* ») peut être considéré comme étant *négligeable* si le nombre de Reynolds *Re* reste *inférieur à 1*.

Dans ce chapitre, on considère que les écoulements *sont continus* et *permanents*. Les *fluides visqueux* étant supposés *isovolumes* et *non pesants* (dans le cas faibles epaisseurs de films liquides). On considère également que ces *écoulements sont plans* (*bidimensionnels*).

De tels écoulements se présentent dans la *lubrification par liquide*, du moins quand l'*épaisseur du film liquide est suffisante* pour que ce *film puisse être considéré comme un milieu continu*. On dit alors qu'on a réalisé une « *lubrification hydrodynamique* ».

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Nombre de Reynolds : *Re*

Conservation QDM

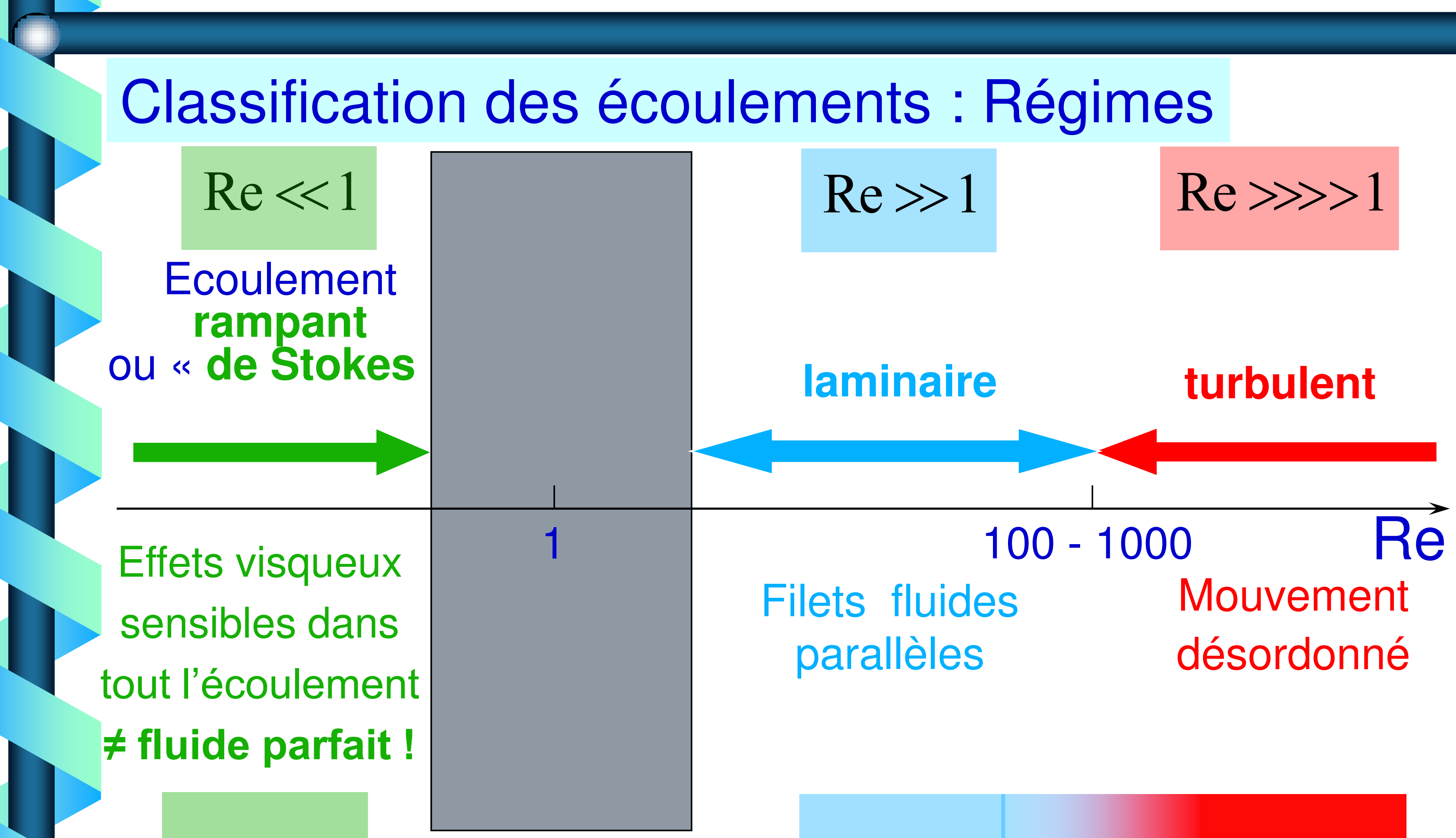
$$Re = \frac{\rho L V}{\mu}$$

$$= \frac{\text{Forces d'inertie du fluide}}{\text{Forces visqueuses}}$$

$$= \frac{\text{Energie cinétique du fluide}}{\text{Energie dissipée par frottement}}$$

$$= \frac{\text{Temps de transport de QDM par diffusion}}{\text{Temps de transport de QDM par convection}}$$

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

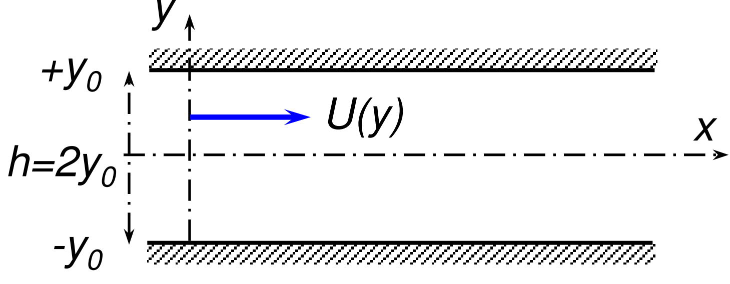


ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

2. Ecoulements entre deux plans parallèles

Si l'écoulement est parallèle à une direction donnée ox, les lignes de courant sont des droites parallèles. Le calcul s'effectue comme pour le cas d'un tube cylindrique, et dans le cas d'un écoulement permanent, on trouve :

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$



où u ne dépend que de y et p ne dépend que de x ; ce qui conduit à écrire que :

$$\frac{dp}{dx} = C^{te} = -a$$

La pression varie linéairement le long de l'écoulement, et pour une conduite de longueur l, on a :

$$a = \frac{p_2 - p_1}{l} = \frac{\Delta p}{l}$$

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Ainsi, l'intégration de l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{-a}{\mu}$$

fournit la solution générale suivante :

$$u(y) = -\frac{a}{\mu}.\frac{y^2}{2} + b.y + c$$

où b et c sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites.

2.1. Ecoulements plans de Poiseuille

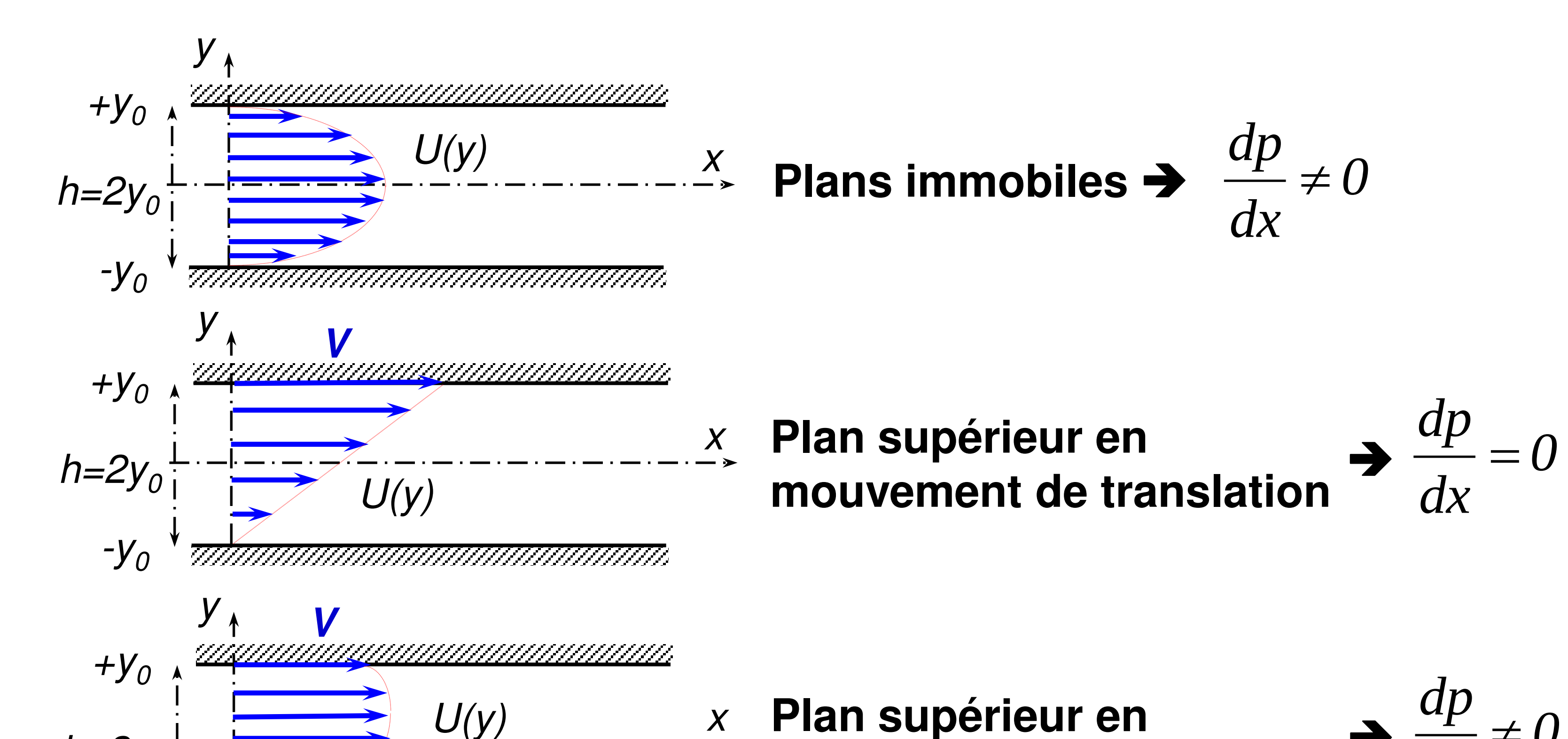
Les deux parois sont au repos. Donc *u = 0* à *$y=\pm y_0$*. On trouve :

$$u(y) = \frac{a}{2\mu}.y_0^2.\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)$$

La vitesse maximale est atteinte au centre (en y=0). Elle vaut : $u(y) = \dfrac{a.y_0^2}{2\mu}$

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

La répartition des vitesses est donc parabolique et va dépendre du signe du gradient de pression :



ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Exercice d'application

On considère l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique μ entre deux plans horizontaux distants de h, l'un étant animé d'une vitesse V parallèlement à l'autre fixe, et soumis à un gradient de pression motrice longitudinal $d\hat{p}/dx$.

1) Établir le profil de vitesse entre les deux plans, et étudier les cas suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{p}}{dx} > 0 \\ \dfrac{d\hat{p}}{dx} < 0 \\ \dfrac{d\hat{p}}{dx} = 0 \end{cases}$$

2) Donner l'expression du débit linéi*que q* pour une largeur ℓ.

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

2.2. Ecoulements de Couette

Dans ce cas, on a $\frac{dp}{dx} = -a = 0$, une paroi est immobile, l'autre en mouvement avec la vitesse uniforme *V*. Le profil de vitesse devient alors :

$$u(y) = \frac{V}{2} \cdot \left(1 + \frac{y}{y_0} \right)$$

La répartition des vitesses est donc linéaire. Elle correspond à l'exemple que nous avions étudié dans l'exercice précédent.

Pour l'écoulement de *Couette généralisé*, le gradient de vitesse n'est pas toujours nul. Il peut être positif ou négatif. Et c'est aussi l'exemple qui a été étudié précédemment.

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

3. Ecoulements de *Stokes* ou écoulements *rampants*

Lorsqu'un fluide visqueux s'écoule *lentement* en un *lieu étroit* ou *autour d'un petit objet*, les effets visqueux dominent sur les *effets inertiels*. Son écoulement est alors appelé écoulement de Stokes (ou écoulement rampant ; et on parle parfois de *fluide de Stokes* par opposition à *fluide parfait*). Il est en effet régi par une version simplifiée de *l'équation de Navier-Stokes* : C'est l'*équation de Stokes*, dans laquelle les *termes inertiels sont absents*. Le *nombre de Reynolds Re* mesure le poids relatif des termes visqueux et inertiel dans l'*équation de Navier-Stokes*. L'écoulement de Stokes correspond ainsi à un faible *nombre de Reynolds Re* (Re << 1).

L'*équation de Stokes* permet en particulier de décrire les écoulements de liquide dans les *dispositifs microfluidiques*. Les écoulements de *Couette* et de *Poiseuille* sont aussi décrits par cette équation.

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v}$$

$$\mathcal{O}(\rho U^2/L) \qquad \mathcal{O}(\mu U/L^2)$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité de mouvement

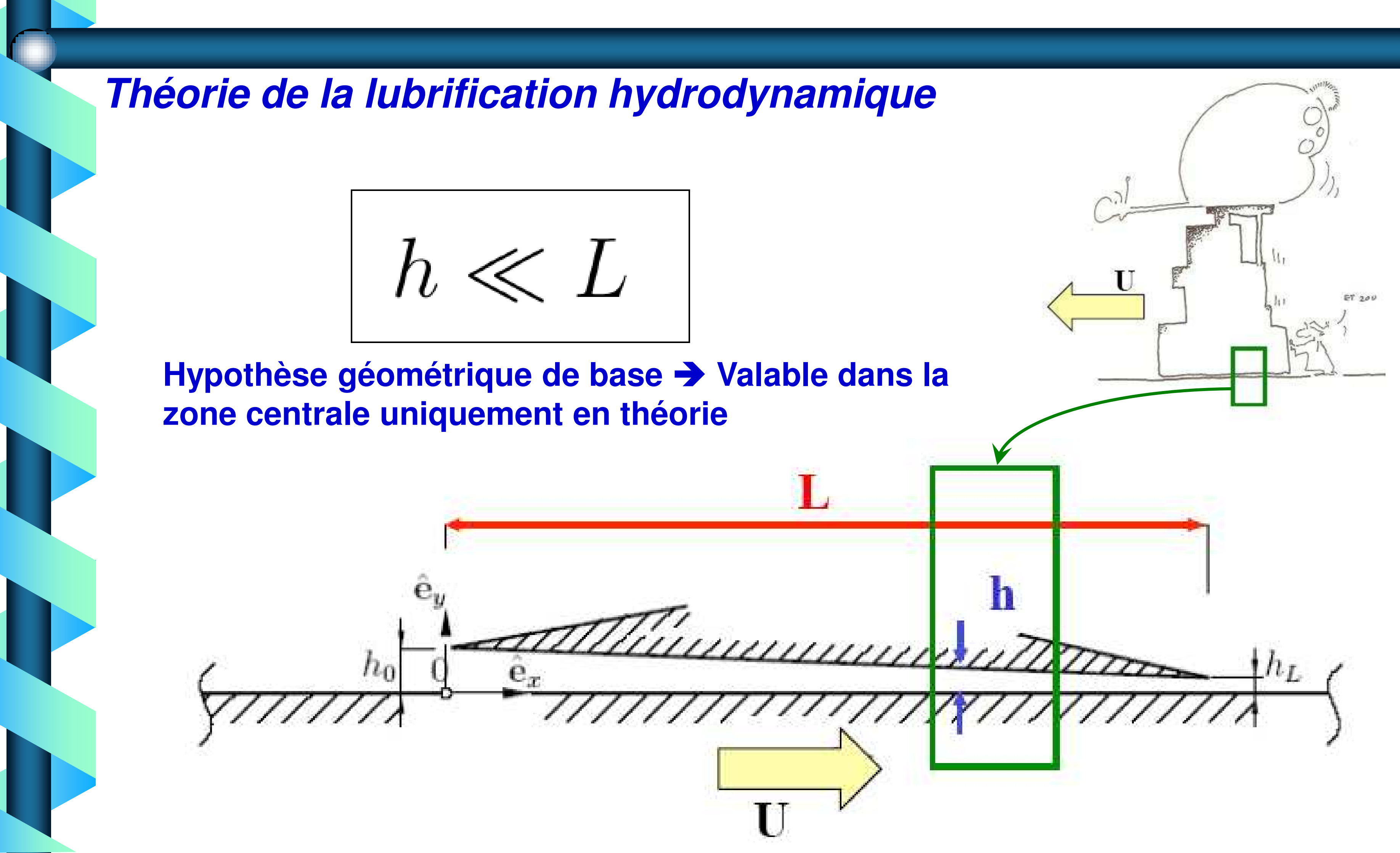
$$Re = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces visqueuses}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

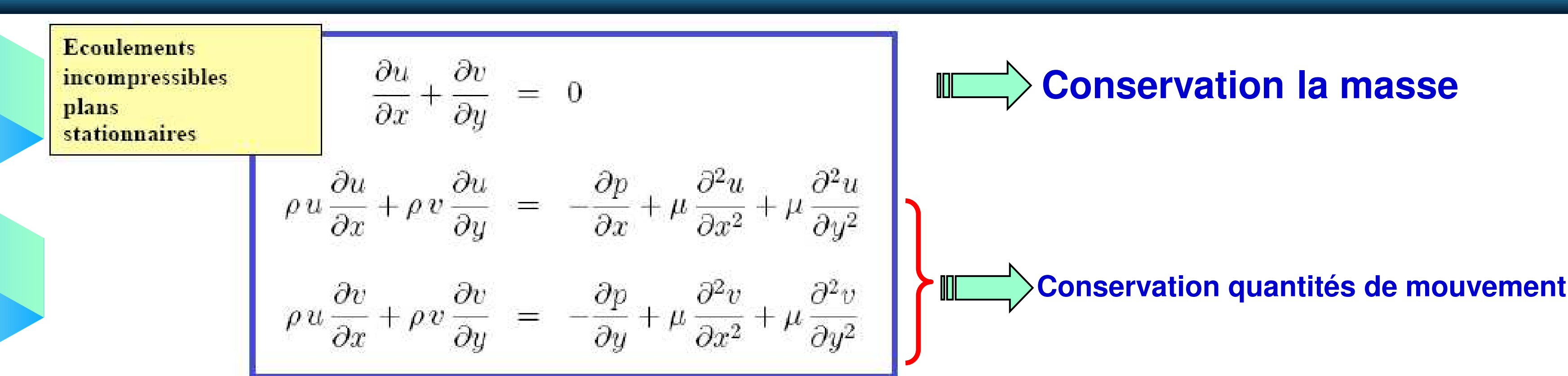
Théorie de la lubrification hydrodynamique

$$h \ll L$$

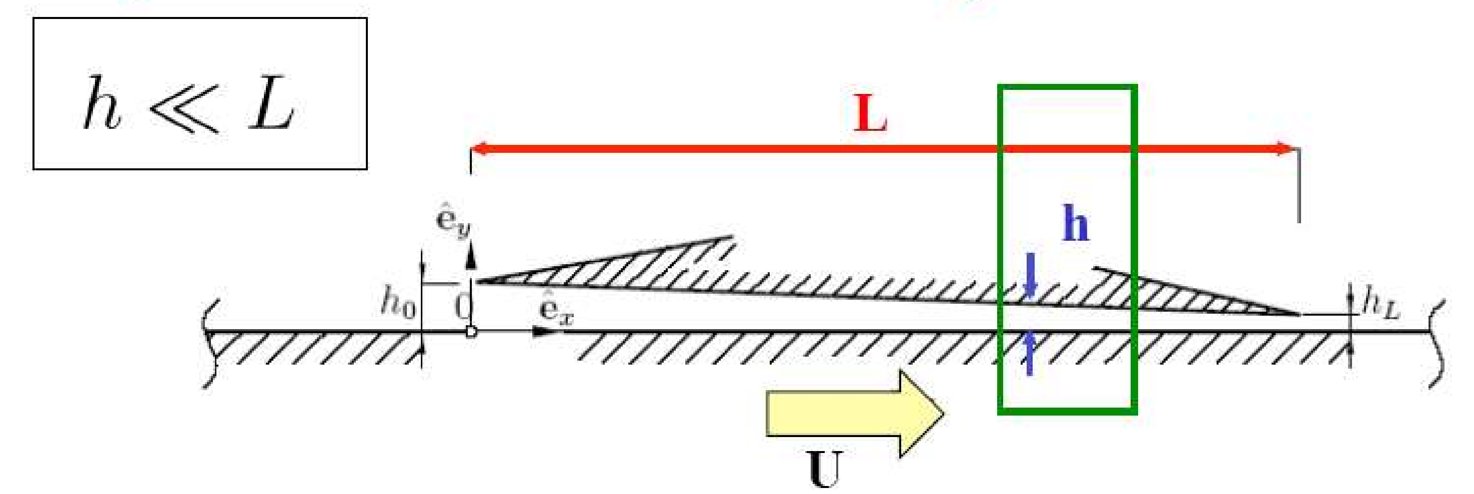
Hypothèse géométrique de base ➔ Valable dans la zone centrale uniquement en théorie



ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE



Que deviennent ces équations ?



ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

$$h \ll L$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\, u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho\, u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Longueur horizontale caractéristique : L
Longueur verticale caractérisitique : h
Vitesse horizontale caractéristique : U



Comment choisir une vitesse verticale caractéristique ?

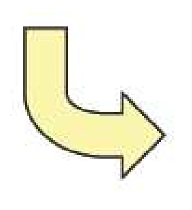
ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Quand peut-on négliger les termes d'inertie ?

$$\underbrace{\rho\, u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\mathcal{O}(\rho U^2/L)} + \underbrace{\rho\, v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\mathcal{O}(\rho U^2/L),\ \mathcal{O}(\rho V U/h)} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\mathcal{O}(\mu U/L^2) \ll \mathcal{O}(\mu U/h^2)$$

Hypothèse de lubrification :
Écoulements rampants



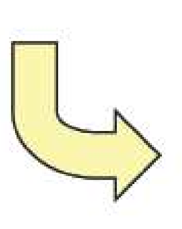
$$\frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces visqueuses}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/h^2} = \underbrace{\frac{\rho U L}{\mu}}_{Re_L} \frac{h^2}{L^2} \ll 1$$

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Et l'autre équation ?

$$\underbrace{\rho\, u\, \frac{\partial v}{\partial x}}_{\mathcal{O}(\rho U^2 h/L^2)} + \underbrace{\rho\, v\, \frac{\partial v}{\partial y}}_{\mathcal{O}(\rho U^2 h/L^2)} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

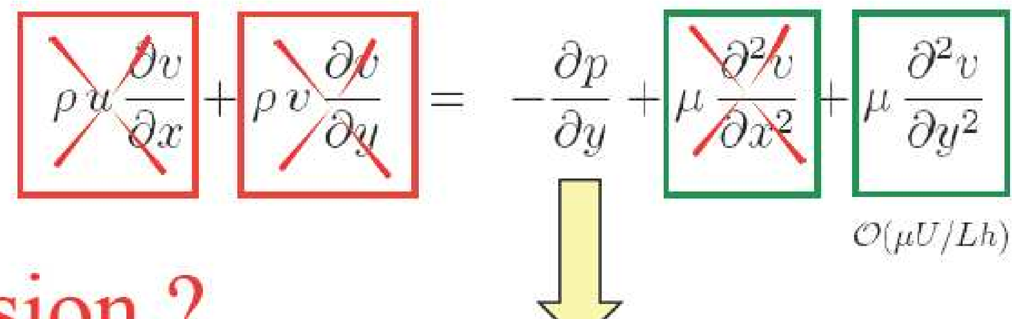
$$\mathcal{O}(\mu U h/L^3) \ll \mathcal{O}(\mu U/Lh)$$



On obtient la même condition…

$$\frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces visqueuses}} = \frac{\rho U^2 h/L^2}{\mu U/Lh} = \underbrace{\frac{\rho U L}{\mu}}_{Re_L} \frac{h^2}{L^2} \ll 1$$

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE



Et la pression ?

$$p(x,y) - p_0 = p(x,0) - p_0 + y \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$\mathcal{O}(\mu UL/h^2) \gg \mathcal{O}(\mu UL/L^2)$

$\mathcal{O}(\mu U/h^2)$

$$\rho\, u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Equations de Reynolds (1889)

Théorie de la lubrification

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

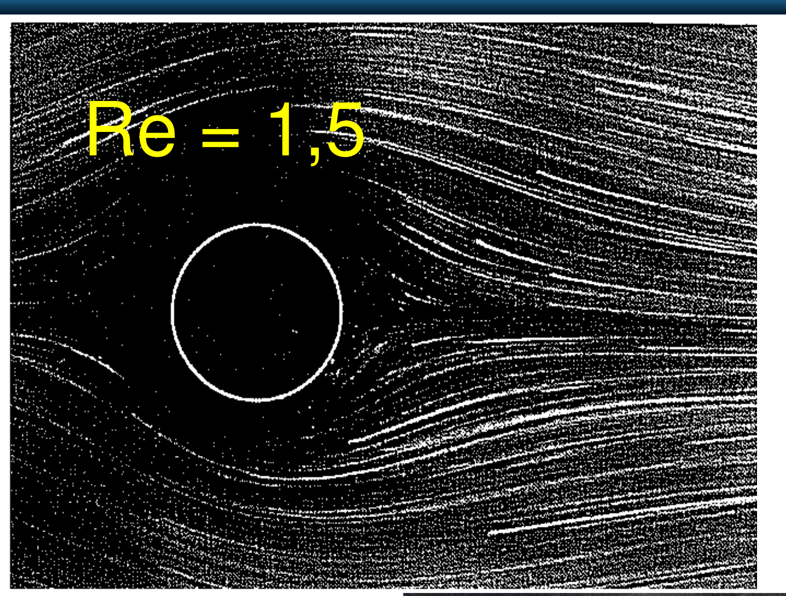
Film fluide mince

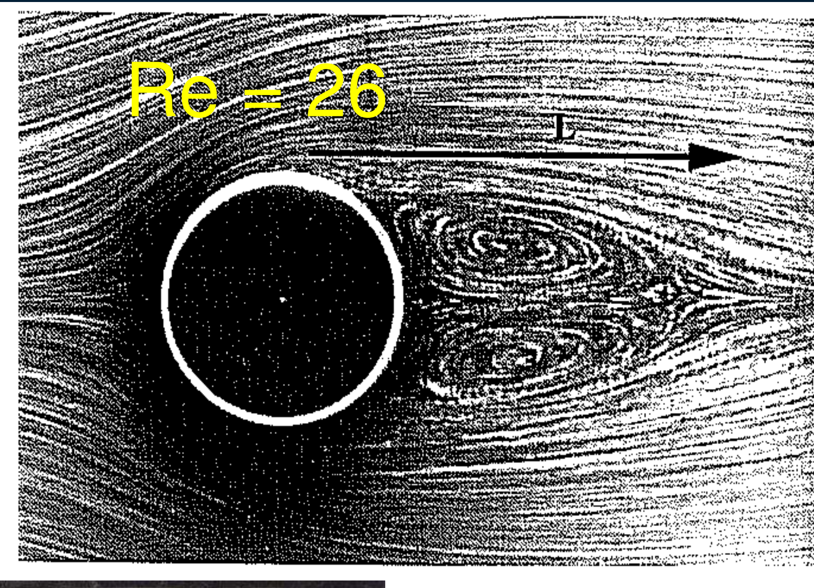
$$h \ll L$$

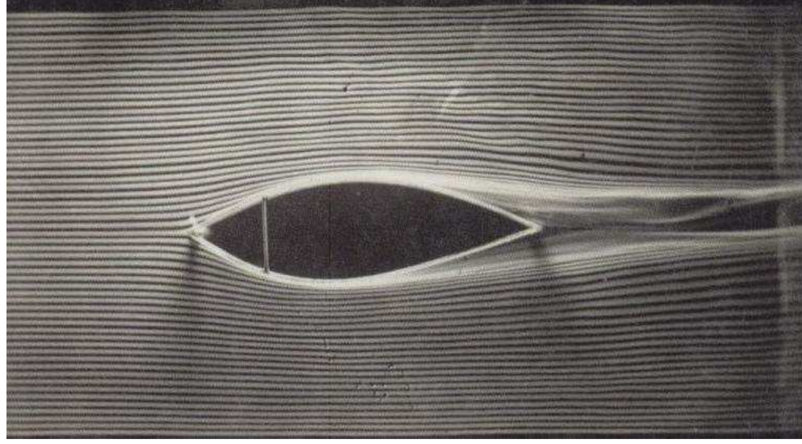
Hypothèse de lubrification : Écoulements rampants

$$\underbrace{\frac{\rho U L}{\mu}}_{Re_L} \frac{h^2}{L^2} \ll 1$$

ÉCOULEMENTS RAMPANTS LAMINAIRES ET LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE







Chapitre 8

Aérodynamique externe en fluide idéal

Chapitre VI

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

1. Introduction

Par définition, l'Aérodynamique est une partie de la *physique qui s'intéresse aux phénomènes accompagnant tout mouvement relatif entre un corps et l'air où il baigne.*

Les "Phénomènes" particulièrement intéressants pour l'ingénieur sont :

- **Efforts subis par des véhicules (avions, automobiles, trains…) ou des projectiles (fusées, missiles, etc.) en mouvement dans l'atmosphère :**

  ➔ ***AERODYNAMIQUE EXTERNE***

- **Etude des systèmes de propulsion de ces véhicules ou projectiles qui exploitent les propriétés de l'air ingéré au niveau des entrées d'air :**

  ➔ ***AERODYNAMIQUE INTERNE***

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Les ojectifs essentiels recherchés sont :

- Détermination de la traînée et de la portance occasionnées par l'écoulement externe autour des coprs,

- Comprendre de concept de la couche limite sur la surface de l'obstacle placé dans l'écoulement,

- Pouvoir calculer de la couche limite (laminaire ou turbulente) sur la surface de l'obstacle.

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

×Écoulements externes :

1- Portance et traînée

2- Couche limite laminaire

3- Transition laminaire/turbulent

4- Couche limite turbulente

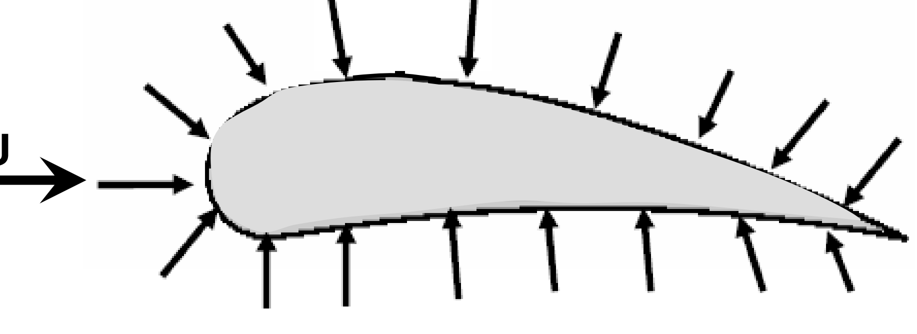
5- Coefficients de traînée et de portance expérimentaux

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Portance et traînée :

Lorsqu'un corps se trouve complètement ou partiellement dans un écoulement externe, il subit deux types de forces :

- **Des forces perpendiculaires à la surface du corps qui sont les forces de pression.**



- **Des forces tangentes à la surface du corps qui sont des forces de cisaillement.**

U

τ_p

Distribution de la contrainte de cisaillement

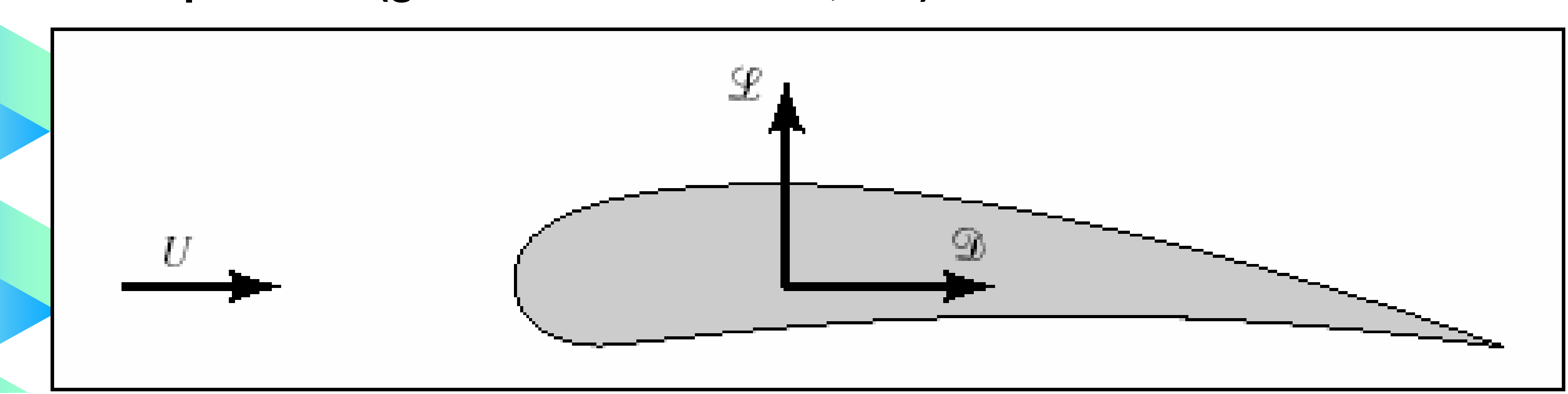
AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Traînée et Portance :

Les forces de pression et de cisaillement éveloppées sur la surface d'un corps sont décomposées en deux composantes :

1- **Force parallèle à l'écoulement incident appelée force de traînée (généralement notée D, Drag).**

2- **Force perpendiculaire à l'écoulement incident appelée force de portance (généralement notée L, Lift).**



AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Traînée et Portance :

Hypothèse 1

- Lorsqu'un corps se déplace dans fluide stationnaire (mouvement d'un avion dans une stratosphère stationnaire), ou d'un écoulement autour d'un corps fixe.

⇨ On fixe un repère lié au corps et on considère que le fluide arrive avec une vitesse incidente constante V.

⇨ Écoulement incident uniforme et constant.

Corps

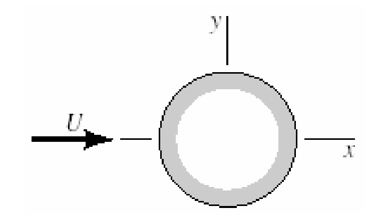
AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Traînée et Portance :

Hypothèse 2

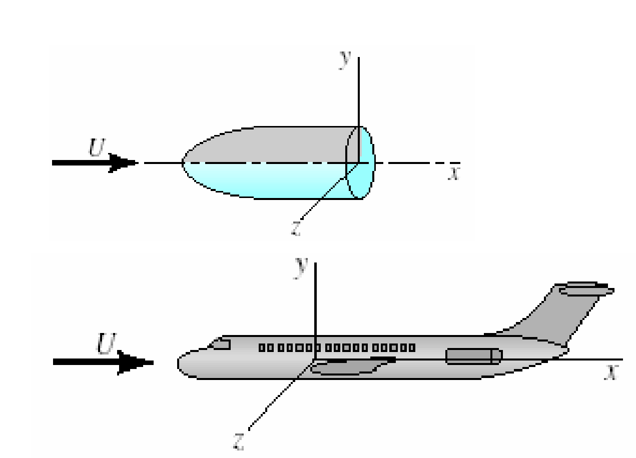
La structure de l'écoulement est classée en trois catégories générales selon la forme du corps :

a) Bidimensionnel (2-D), lorsque le corps est infiniment long avec une section longitudinale parallèle à l'écoulement constante



b) Axisymétrique : lorsque le corps a un axe de symétrie dans la direction de l'écoulement

c) Tridimensionnel (3-D)



AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Traînée et Portance :

Hypothèse 2

On définit les coefficients adimensionnels de traînée C_D et portance C_L par :

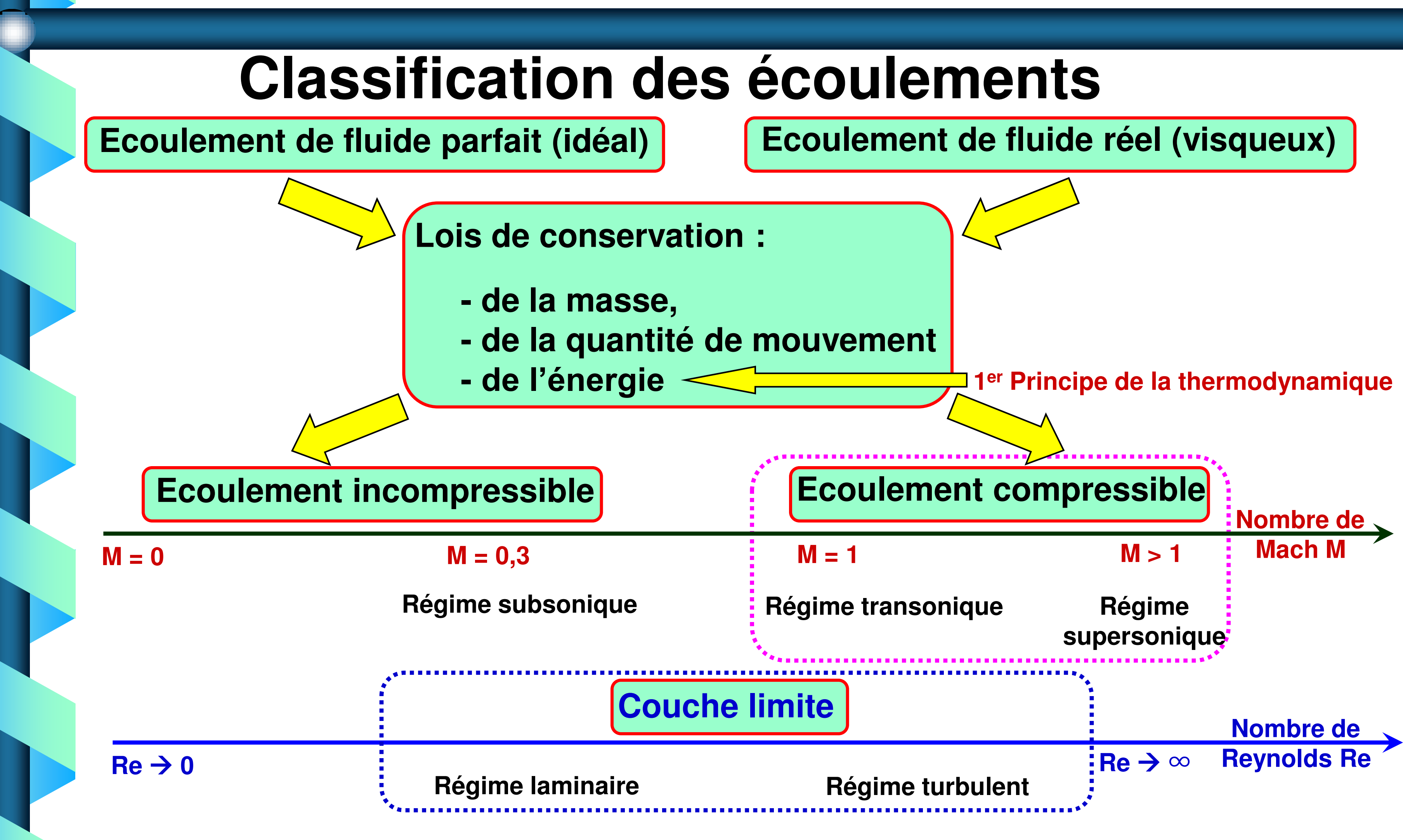
$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_{ref}}$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_{ref}}$$

Ces coefficients peuvent être calculés à partir des expériences en se basant sur l'analyse dimensionnelle ou aussi par des méthodes numériques.

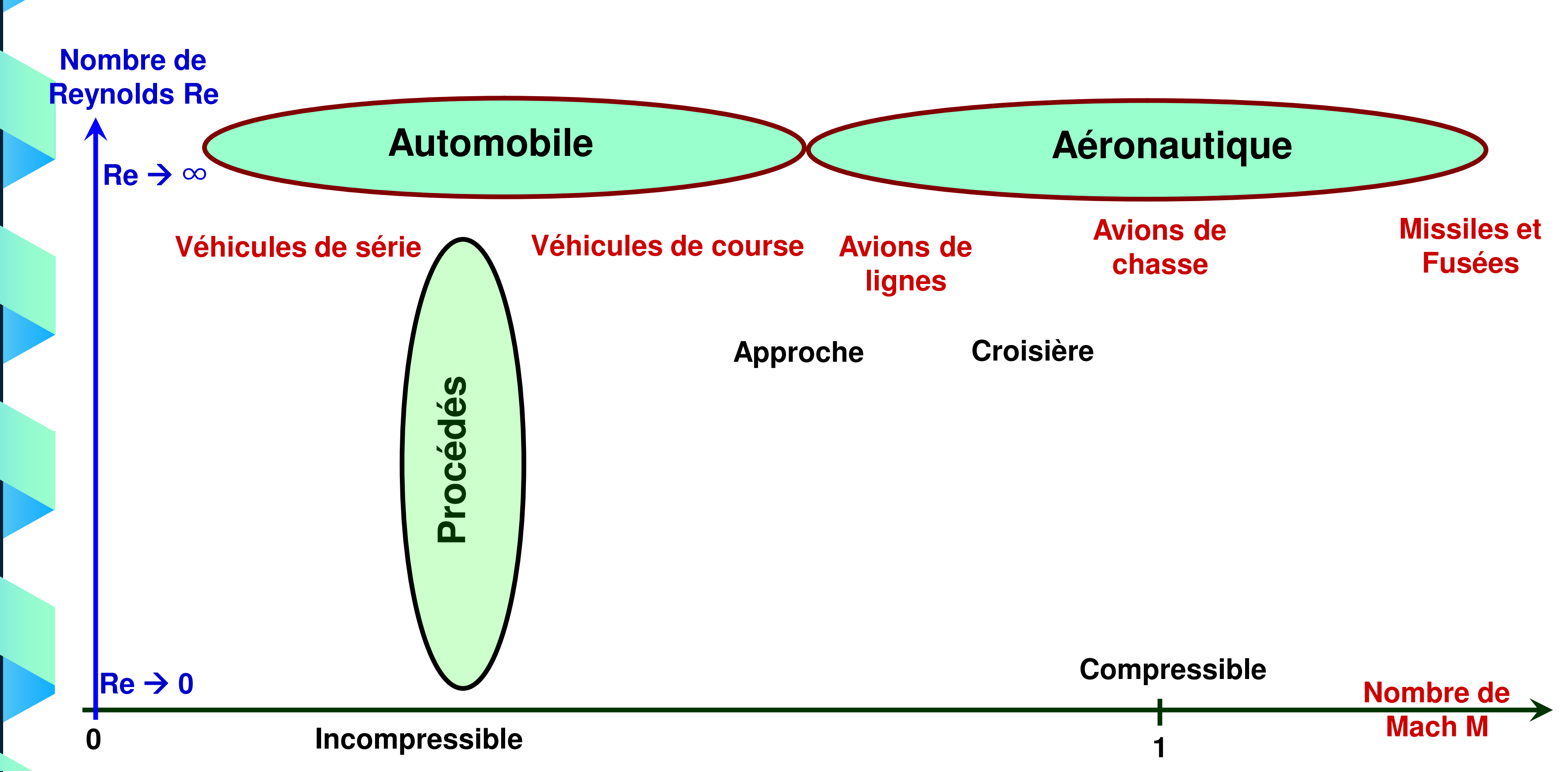
AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Classification des écoulements



AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Positions schématiques de quelques domaines d'applications dans le plan Mach-Reynolds

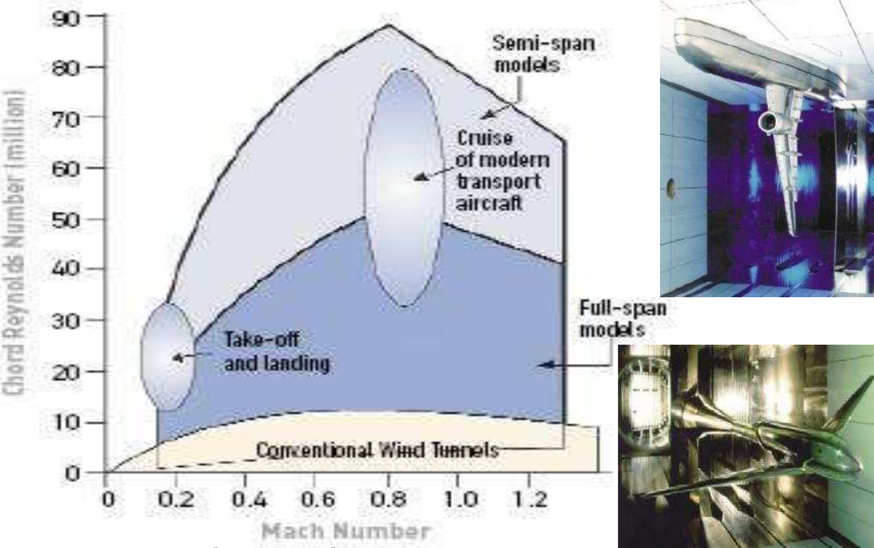


AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Outils d'analyse des écoulements

Aérodynamique expérimentale

- Intérêt majeur ➔ **Prédiction**
- Principaux inconvénients ➔
  méthode très côuteuse, limitations en Mach et Reynolds, effets de paroi (corrections à apporter)

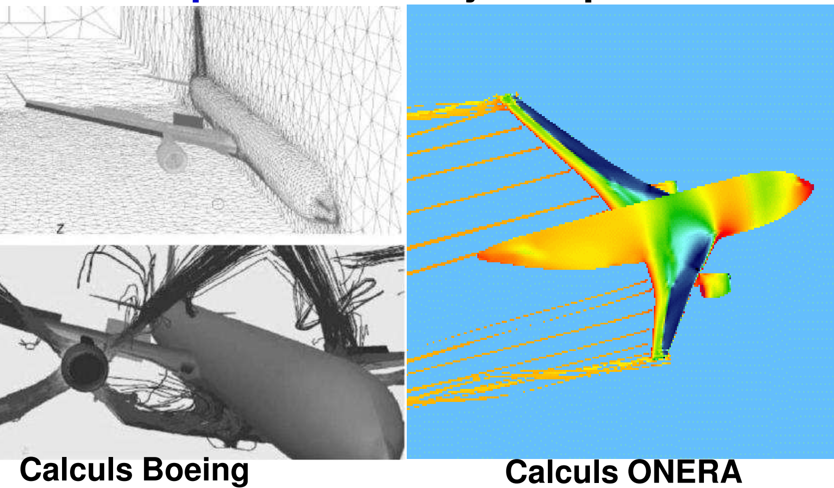


Données expérimentales (soufflerie)

Aérodynamique numérique

Computational Fluids Dynamics (CFD)

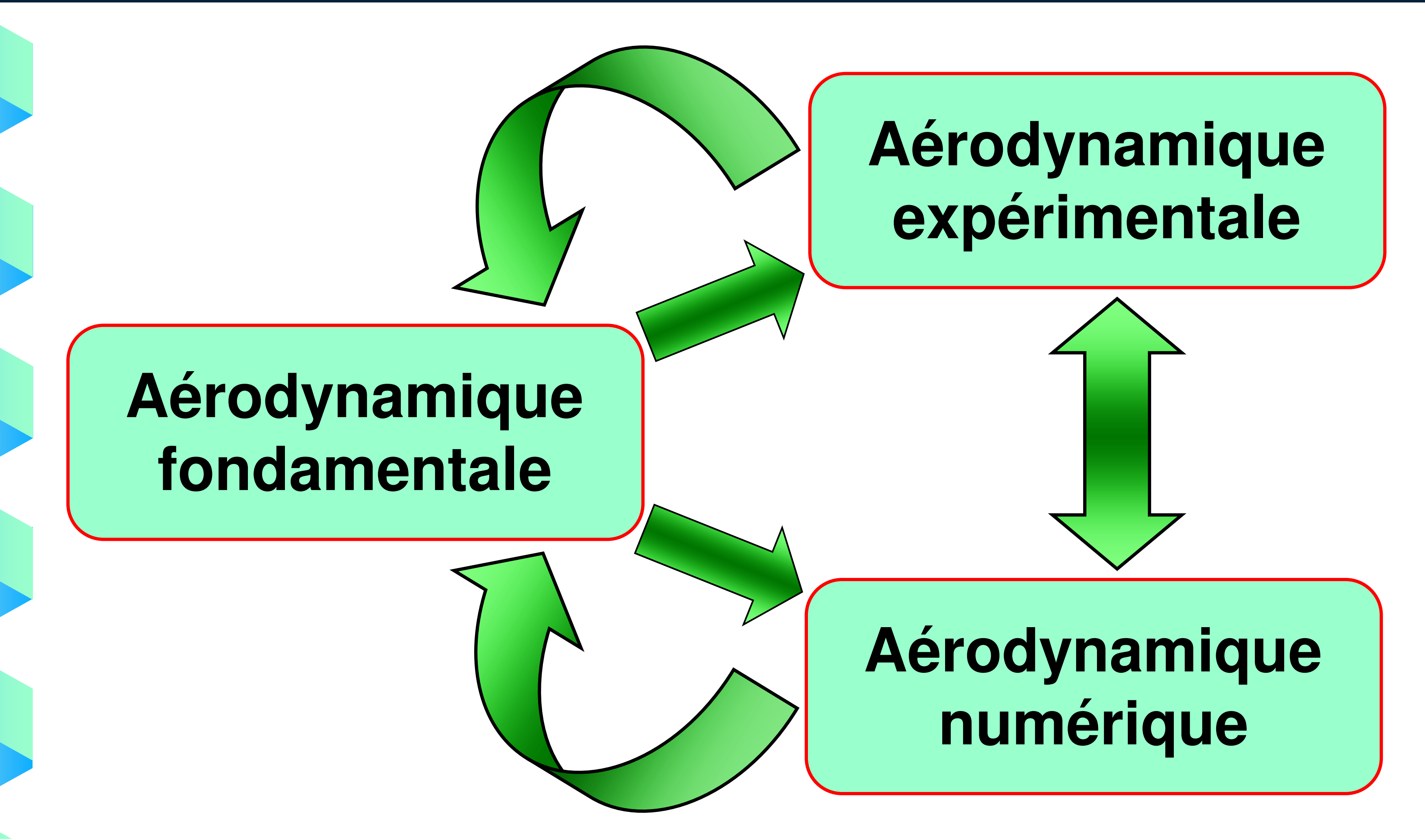
- Intérêt majeur ➔ **Souple d'utilisation et peu coûteuse(en général)**
- Principaux inconvénients ➔
  Dépendance des résultats vis-à-vis de la modélisationet parfois de la méthode numérique ⇒ Pas toujours prédictive



Calculs Boeing

Calculs ONERA

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL



AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

Modèles de Fluide

Approche microscopique :

On s'intéresse au comportement de chacune des molécules du fluide
⇒ *Théorie Cinétique des Gaz*

Approche macroscopique :

On définit un comportement moyen des molécules comprises dans un volume élémentaire (particule fluide) ⇒ *Mécanique des Milieux Continus*

- Approche pertinente selon la densité moléculaire (caractérisée par le libre parcours moyen λ) :
  - ✔ Cinétique des gaz → Spatial
  - ✔ Milieu Continu → L'essentiel des problèmes en aéronautique, domaine automobile et des procédés, etc.
- Paramètre distinctif : nombre de Knudsen $= \lambda / L \approx 0{,}01 << 1$ ➔ MMC

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

2. Coefficients de pression

Si p est la pression statique en un point de la paroi du corps, on définit ainsi le coefficient de pression locale par :

$$K_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty . V_\infty^2}$$

C'est un coefficient sans dimensions, où p_∞, V_∞ et ρ_∞ désignent toujours les conditions à l'infini.

Pour un fluide incompressible et parfait, le théorème de Bernoulli, appliqué entre un point situé à l'infini et un point situé à la frontière de la couche limite (conditions p, ρ_∞ et V), donne l'expresion suivante :

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty . V_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho_\infty . V^2$$

Et le coefficient de pression locale devient alors ainsi :

$$K_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2$$

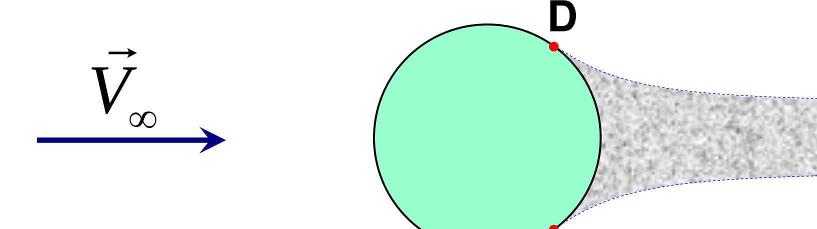
AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

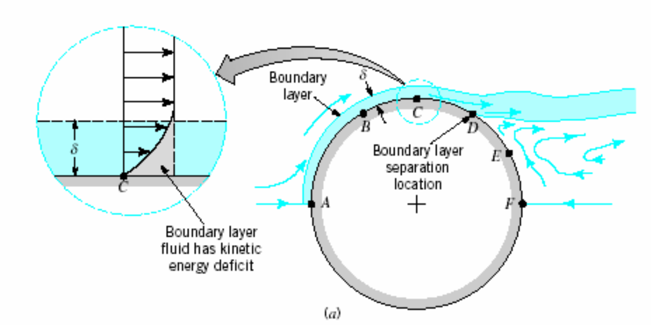
$$K_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2$$

Cette relation permet de définir les pressions, connaissant le champ des vitesses.

Pour un fluide réel, lorsqu’un sillage se forme à l’aval du corps, la relation précédente, reste valable avec une très bonne approximation, tant que l’on ne peut négliger la compressibilité jusqu’au point de décollement D.

Mais dans le sillage, il ne peut être question d’utiliser cette formule pour la détermination de la pression en un point de la paroi.





AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

4. Corps géométriquement simples

Dans cette configuration, on étudie l'écoulement autour de corps dont l'axe est de symétrie est dirigé dans la direction de l'écoulement (ou de la vitesse $\vec{V}_\infty$). La résultante $\vec{R}$ a donc ce même axe de symétrie pour support, et **se réduit alors à une traînée**.

Classification

On distingue deux catégories de corps :

1) Les ***corps non profilés*** pour lequels la **traînée de pression est propondérante**. L'étude de l'écoulement autour de ces corps conduit à faire une **nouvelle distinction** :

   a) Les *corps à arêtes vives* pour lesquels l'**arête fixe la position de la ligne de décollement**,

   b) Les *corps non profilés à courbure progressive* (comme une sphère ou un cylindre) pour lesquels, selon la valeur du nombre de Reynolds, **le point de décollement peut occuper plusieurs positions**.

2) Les ***corps profilés ou fuselés*** qui ont une **traînée de frottement plus importante que la traînée de pression**.

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

5. Disque plan normal à la vitesse V_∞

Pour 3000 ≤ Re ≤ 960 000 :

→ Face amont : $K_{p\ moyen} = +0{,}83$

→ Face aval : $K_{p\ moyen} = -0{,}29$

On en déduit alors le coefficient de traînée de pression :

$$C_x = 0{,}83 - (-0{,}29) = +1{,}12 = C_{xn}$$

La surface de référence étant celle du disque plan.

Comme le disque est mince, la traînée de frottement est nulle.

Expérimentalement, on montre que la traînée globale est égale à 1,12.

Ceci montre que la *traînée de frottement est effectivement nulle*.

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

6. Cylindre circulaire à génératrices perpendiculaires à V_∞

6.1. Ecoulement sans circulation de fluide parfait autour du cylindre

La répartision des vitesses, autour du cylindre, est donnée par la relation :

$$V = 2.V_\infty.|\sin(\theta)|$$

L'origine de θ est prise au point d'arrêt.

Le coefficient de pression locale est :

$$K_p = 1 - (V/V_\infty)^2$$

Donc, la répartition de la pression devient ainsi :

$$Kp = 1 - (V/V_\infty)^2 = 1 - 4.(\sin(\theta))^2$$

La traînée est nulle.

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

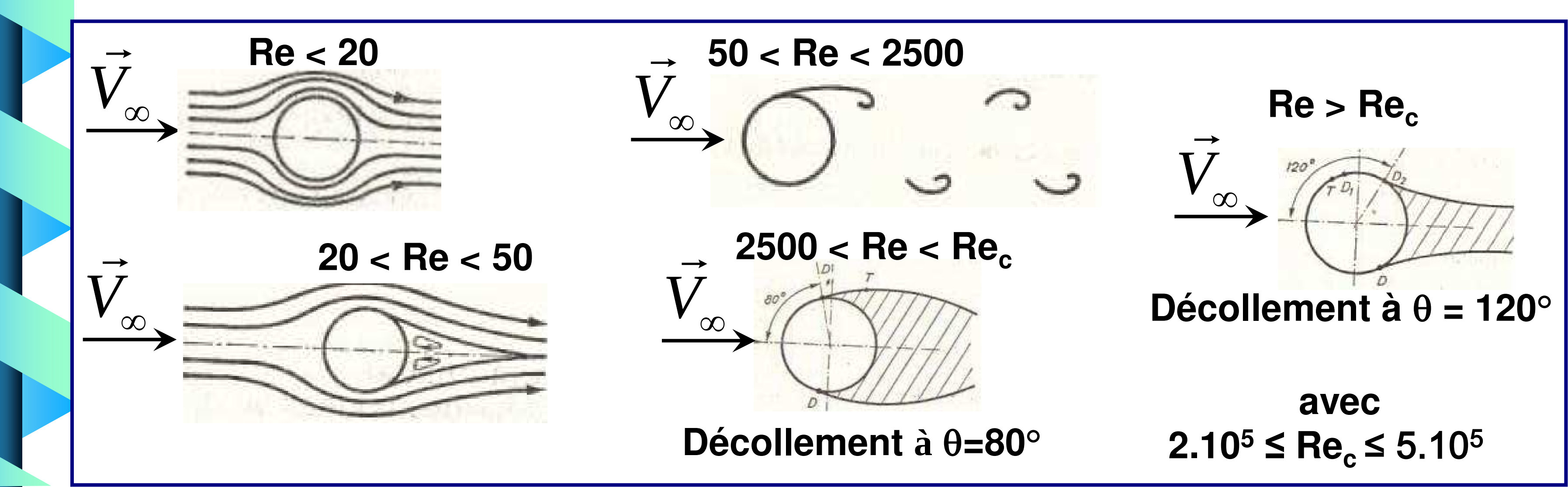
6.2. Influence du nombre de Reynolds Re

a) **Etude expérimentale de la forme des lignes de courant :**

Les observations effectuées en soufflerie à l'aide de fumées, ainsi que la visualisation de l'écoulement au tunnel hydrodynamique, ont montré que l'aspect de l'écoulement varie en fonction du nombre de Reynolds Re.

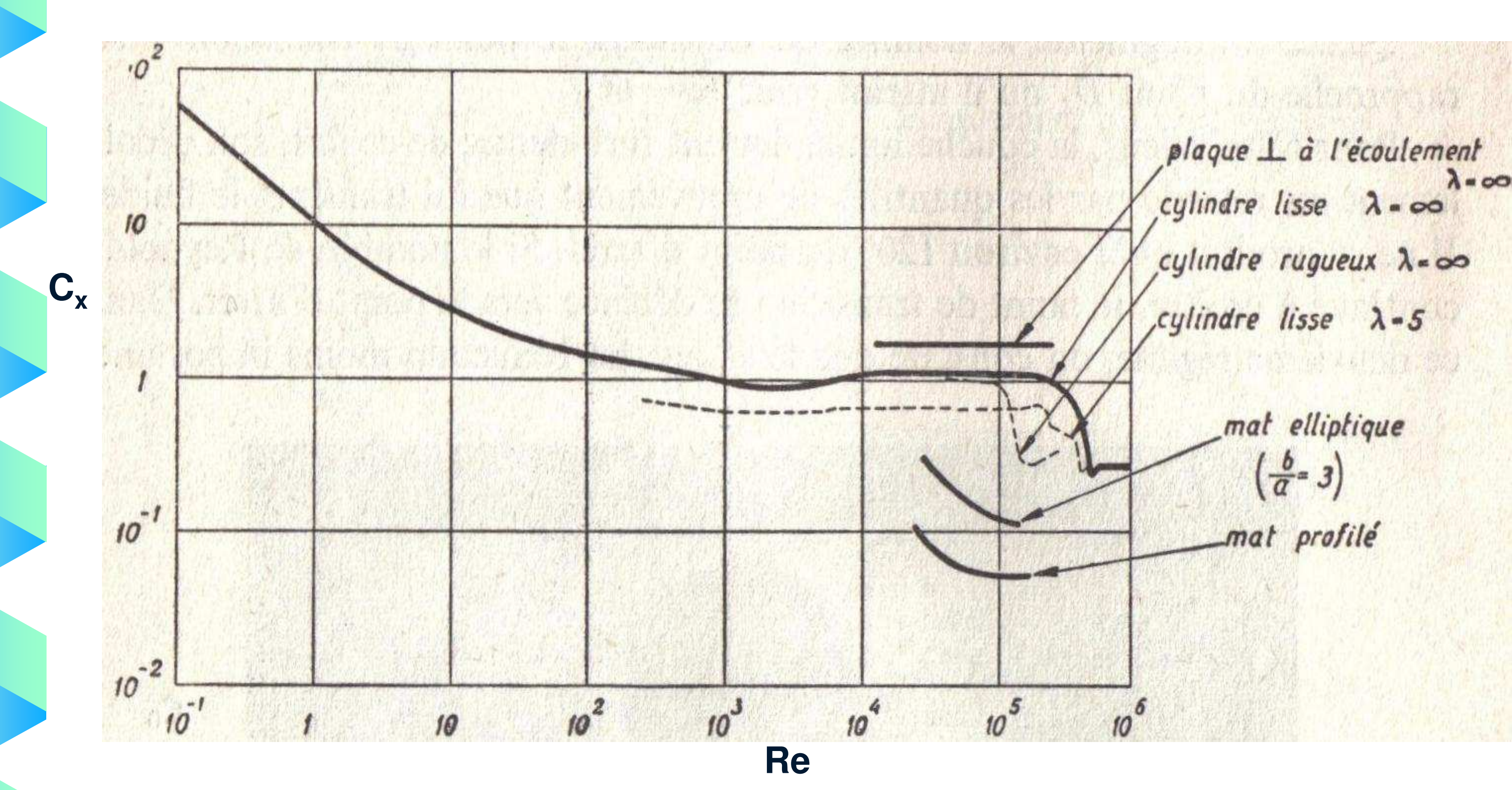
$$Re = V_\infty . D / \nu$$

où D est le diamètre du cylindre et ν est la viscosité cinématique du fluide.



AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

b) Etude expérimentale du coefficient de traînée :



AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

6.3. Répartition de la pression autour du cylindre

Un petit orifice, percé dans la paroi du cylindre, établit la communication entre le fluide qui s'écoule et un manomètre. On relève la pression pour divers azimuts de l'orifice.

Cette figure est obtenue en portant les valeurs de K_p sur la normale au cylindre en chaque point. On a également porté la répartition théorique déduite de l'écoulement irrotationnel (parfait) : $K_p = 1 - 4 \sin^2(\theta)$

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

7.3. Emploi de la sphère comme critère de turbulence

La valeur du nombre de Reynolds critique *Re_c dépend de la turbulence du courant amont*. *Re_c décroit* quand la *turbulence croît*. La valeur de Re_c pour une *sphère peut donc servir à caractériser la turbulence dans une veine d'essais à air*, comme la souflerie par exemple.

On définit conventionnellement Re_c par la *valeur du nombre de Reynolds qui correspond à $C_x = 0{,}3$*. Re_c varie de 150000 (soufflerie très turbulente) à 380000 (très bonne soufflerie). En vol, on trouve généralement :

$$Re_c = 385000$$

Cette méthode n'est valable qu'en première approximation, car les résultats dépendent de la sphère et de l'appareillage utilisés lors des mesures.

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

8. Cas d'une sphère

8.1. Ecoulement aux faibles nombres de Reynolds. Loi de Stokes

Pour Re < 0.3, l'écoulement est laminaire. Stokes a calculé la traînée en appliquant l'équation différentielle de l'écoulement des fluides visqueux. Le résultat ainsi obtenu est le suivant :

$$-R_x = 3\pi.\mu.V_\infty.D$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, et D le diamètre de la sphère.

En passant au coefficient de traînée, on peut mettre ce résultat ainsi :

$$C_x = \frac{-R_x}{\frac{\pi D^2}{4} \times \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{3\pi \mu V_\infty D}{\frac{\pi D^2}{4} \times \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{24\mu}{\rho_\infty V_\infty D} = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$

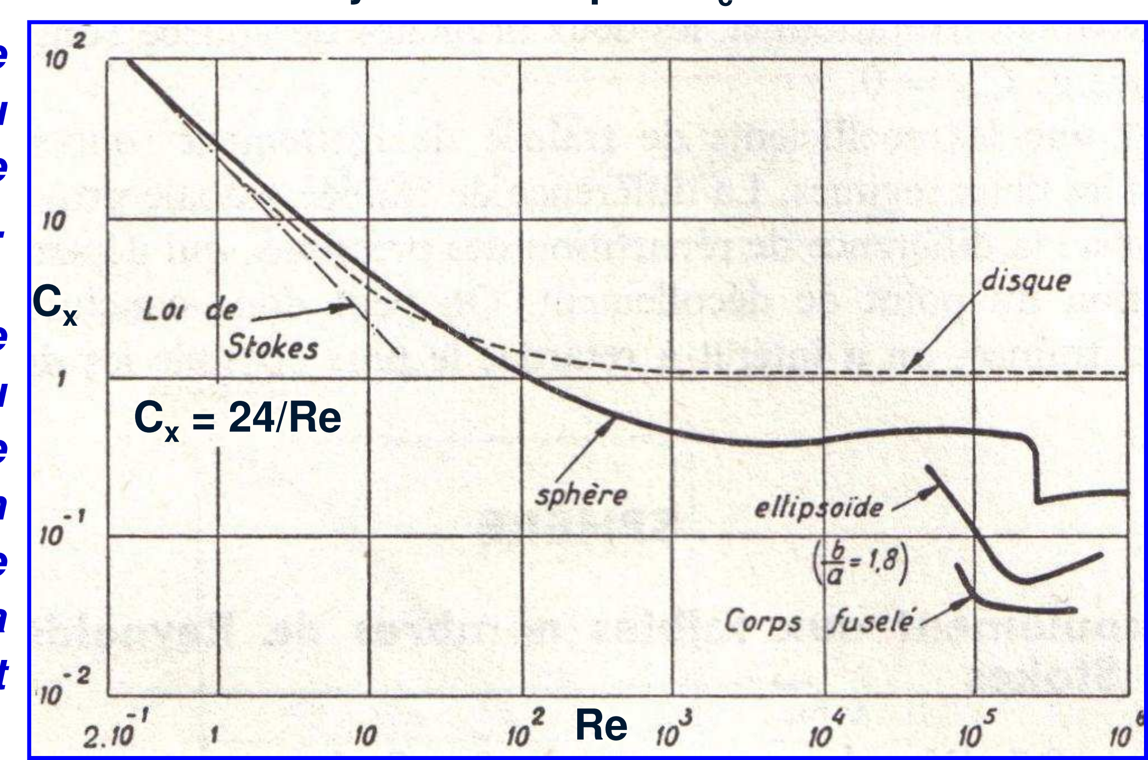
Cette formule présente un intérêt pour l'étude de la chute des petites gouttelettes d'eau dans l'air (calcul de leurs diamètres à partir de la vitesse de chute), pour le calcul de la viscosité dynamique dans les viscosimètres à bille pour l'étude des centrifugeuses et des séparateurs par gravité.

AÉRODYNAMIQUE EXTERNE EN FLUIDE IDÉAL

8.2. Ecoulement avec sillage et décollements

Pour les plus grands nombres de Reynolds Re, on observe des phénomènes analogues à ceux constatés sur le cas du cylindre. Il existe deux régimes d'écoulement, séparés par un nombre de Reynolds critique Re_c voisin de 3 x 10^5.

- ***Le premier régime ($Re<Re_c$) correspond au décollement d'une couche limite laminaire pour θ=85°. On a donc : C_x=0,44***
- ***Le second régime ($Re>Re_c$) correspond au décollement d'une couche limite turbulente pour un angle θ pouvant varier de 110 à 140° selon la turbulence du courant amont. C_x vaut alors 0,176.***



Forme du corps	*$\lambda = L/D$*	*Re*	*C_x*
Disque normal à la direction de l'écoulement		$> 10^3$	1,12
Deux disques l'un derrière l'autre : *L =* distance des disques ; coefficient *C_x* global pour l'ensemble des disques	0 1 2 3	$> 10^3$ $> 10^3$ $> 10^3$ $> 10^3$	1,12 0,93 1,04 1,54
Plaque rectangulaire de longueur *L*, normale à la direction de l'écoulement	1 5 20 ∞	$> 10^3$ $> 10^3$ $> 10^3$ $> 10^3$	1,16 1,20 1,50 1,95
Cylindre circulaire de longueur *L* et d'axe nomal à la direction de l'écoulement	1 5 20 ∞ 5 ∞	10^3 à 10^5 10^3 à 10^5 10^3 à 10^5 10^3 à 10^5 $> 5\ 10^5$ $> 5\ 10^5$ $> 5\ 10^5$	0,63 0,74 0,90 1,20 0,35 0,33
Cylindre circulaire de longueur *L* et d'axe parallèle à la direction de l'écoulement	0 1 2 4 7	$> 10^3$ $> 10^3$ $> 10^3$ $> 10^3$ $> 10^3$	1,12 0,91 0,85 0,87 0,99
Sphère		10^3 à 10^5 $> 5\ 10^5$	0,47 0,20
Hémisphère creux : **- Concavité vers l'amont de l'écoulement** **- Concavité vers l'aval de l'écoulement**		 $> 10^3$ $> 10^3$	 1,33 0,34
Ballon dirigeable		$> 2\ 10^5$	0,05
Profil d'aile	∞	$> 4\ 10^4$	0,07

Chapitre 9

Coups de bélier

Chapitre IX

COUPS DE BÉLIER

Voir l'article de :

Marcel FRELIN, Coups de bélier, Techniques de l'Ingénieur, BM 4 176 41-27.

FIN